Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP07/TEN1
OPTIMERINGSLÄRA GRUNDKURS för Y

Datum:	16 mars 2009
Tid:	8-13
Hjälpmedel:	Inga
Antal uppgifter:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	För godkänt krävs 8 poäng.
Examinator:	Torbjörn Larsson
Jourhavande lärare:	Torbjörn Larsson, tel 2435.

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa Dina beräkningar och Din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påstående Du gör.
Använd alltid de standardmetoder som genomgåtts på föreläsningar och lektioner.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla ej fler än en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera Dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget de uppgifter Du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Vid en auktion skall m stycken objekt säljas. Det finns n stycken spekulanter som var och en kan lägga ett eller flera bud på enskilda objekt eller på godtyckliga kombinationer av objekt. Spekulant j, där $j = 1, \ldots, n$, har budgeten b_j för sina totala inköp. Antag att spekulant j lägger K_j stycken olika bud. Låt c_{jk} vara värdet på bud k från spekulant j, där $k = 1, \ldots, K_j$, och låt $a_{ijk} = 1$ om objekt i ingår i budet, och $a_{ijk} = 0$ annars, för $i = 1, \ldots, m$.

Formulera en linjär 0/1-modell som auktionären skall lösa för att avgöra vilka bud som skall accepteras för att det totala försäljningsvärdet skall maximeras. Från varje spekulant kan ett eller flera bud accepteras, och alla objekt behöver inte säljas. Auktionären förutsätts ha kännedom om spekulanternas budgetar.

(3p)

Uppgift 2

Givet det linjära optimeringsproblemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} \max\ z & = & 2x_1 & + & 3x_2 & & \\ \text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\ & & 4x_1 & + & 2x_2 & \leq & 17 \\ & & 2x_1 & + & 5x_2 & \leq & 19 \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Beräkna skuggpriserna (de optimala värdena på dualvariablerna) för de tre villkoren. **(1p)**

b) För vilka värden på högerledet i det *första* villkoret är dess skuggpris giltigt? **(1p)**

c) Antag att en ny variabel, x_3, adderas till problemet, med bivillkorskoefficienter $A_3 = (2, 3, 2)^T$. För vilka värden på dess målfunktionskoefficient, c_3, gäller $x_3^* > 0$? **(1p)**

Uppgift 3

Om LP-relaxationen av problemet

$$\begin{array}{rrcrcrcll} \max\ z & = & 3x_1 & + & 4x_2 & & & \\ \text{då} & & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 7 & \\ & & 4x_1 & + & 6x_2 & \leq & 11 & \\ & & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 & \text{och heltaliga,} \end{array}$$

löses med simplexmetoden så ges en rad i optimaltablån av

$$x_2 - \frac{2}{5}\, s_1 + \frac{3}{10}\, s_2 = \frac{1}{2}\ ,$$

där s_1 och s_2 är slackvariabler.

a) Bilda ett Gomory-snitt utifrån denna rad och uttryck snittet i x_1 och x_2. **(1p)**

b) Beskriv det konvexa höljet av de tillåtna heltalslösningarna med villkor i endast x_1 och x_2. **(1p)**

c) Utgör Gomory-snittet en fasett till det konvexa höljet? Motivera! **(1p)**

Uppgift 4

Betrakta följande heltalsproblem.

$$\begin{array}{rrcrcrcrcrcrcrcl} z^* = \max & 12x_1 & + & 11x_2 & + & 16x_3 & + & 18x_4 & + & 9x_5 & + & 22x_6 & & \\ \text{då} & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & + & 2x_5 & + & 5x_6 & \leq & 8 \\ & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & \leq & 7 \\ & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & x_6 & \leq & 3 \\ & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & , & x_5 & , & x_6 & = & 0/1 \end{array}$$

Lagrange-relaxera de *två första* villkoren med multiplikatorer $u_1 = 1$ och $u_2 = 2$. Upprepa för $u_1 = 2$ och $u_2 = 4$. Vilken är den starkaste möjliga utsagan som utifrån dessa beräkningar kan göras om z^*?

[Ledning: Konstruera Lagrange-relaxationen så att *otillåtenhet* i de relaxerade villkoren *straffas*.] **(3p)**

Uppgift 5

Betrakta problemet

$$\begin{array}{rrrrrrr} \max & - & 3x_1 & + & x_2 & & \\ \text{då} & & x_1^3 & - & x_2 & \geq & 0 \\ & & x_1^2 & + & x_2^2 & \leq & 2 \\ & & & & x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

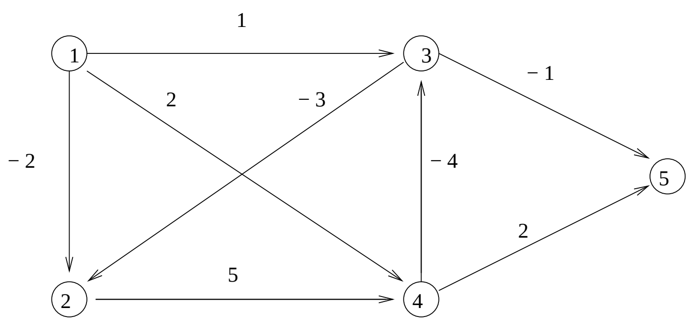
a) Visa att $x = (1, 1)$ är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt. **(1p)**

b) Visa att $x = (0, 0)$ *inte* är en Karush-Kuhn-Tucker-punkt. **(1p)**

c) Bestäm alla lokala maxima. Motivera noga!
[Ledning: Studera problemet grafiskt.] **(1p)**

Uppgift 6

Givet nedanstående nätverk med bågkostnader. Antag att en kortaste väg från nod 1 till nod 5 söks.



Visa att för detta problem saknar Bellmans ekvationer lösning. **(3p)**

Uppgift 7

Avgör för vart och ett av följande påståenden om det är sant eller falskt. Motivera svaret!

a) Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}},$$

där $\alpha > 0$, är konkav för $|x| < \alpha$. **(1p)**

b) Givet systemet

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & 12 \\ 2x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 3 \\ -\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0 \end{array} \right.$$

som definierar en mängd i R^4. Då är $x = (\frac{9}{5}, \frac{13}{5}, 0, 1)$ en hörnpunkt i denna mängd. **(1p)**

c) Låt

$$f^* = \min_{x \epsilon R^n} f(x)$$
$$\text{då } g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m,$$

och

$$l^* = \min_{x \epsilon R^n} f(x) + \mu \sum_{i=1}^{m} (\max\ \{0, g_i(x)\})^2,$$

där $\mu > 0$. Då gäller att $l^* \leq f^*$. **(1p)**
