Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Andrea Ruggiu / Fredrik Berntsson

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2019-01-07

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $8^{00} - 12^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Ange maskinepsilon för ett flyttalsssystem med bas 2, 112 bråkdelssiffror och exponent mellan -16382 och 16383. (1p)

   (b) Beskriv Runges fenomen. (1p)

   (c) Förklara vad som menas med noggrannhetsordning hos numerisk integrering. (1p)

   (d) Vad är det för skillnad på lokalt och globalt trunkeringsfel? (1p)

   (e) Visa att $f(x) = e^x$ inte har några fixpunkter (antingen på en analytisk sätt eller med hjälp av en figur). (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt $z = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ med små x. Antar att vi vill beräkna z på en räknare med känd avrundningenheten μ. Kör en beräkningsfelsanalys med maximalfelsuppskattningen för att uppskatta <u>relativt</u> fel i z. (1p)

3. (a) Lös

$$\begin{cases} -\frac{5}{8}x_1 + 2x_2 - \frac{11}{8}x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 &= 1, \\ 2x_3 &= 0 \end{cases}$$

   genom LU-uppdelning av koefficientmatrisen A, följt av framåt- och bakåtsubstitution. Använd partiell pivotering. (2p)

   (b) Uppskatta relativt fel på lösningen i max-norm om

$$A^{-1} = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 16 & 32 & 11 \\ 32 & 10 & 22 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

   och högerleden har 2 korrekta decimaler. (1p)

4. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade

x	0.6	0.8	1.0
$f(x)$	1.20	0.75	0.60

   (a) Uppskatta $f(0.9)$ med hjälp av den kvadratiska spline $s(x)$ som interpolerar alla punkterna och uppfyller villkoret $s'(0.6) = 0$. (2p)

   (b) Beräkna $\int_{0.6}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ med trapetsregeln, samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

   (c) Uppskatta $f^{-1}(0.8)$ med hjälp av kvadratisk interpolation med Lagrange-polynom. (1p)

5. Betrakta $y'' = -x^2 y + 3x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Använd Euler framåt och $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(0.3)$. (2p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. Minsta kvadratmetoden kan användas för att hitta en polynom $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n+1} x^n$ som anpassar bra till m givna punkter (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, m$.

   (a) Låt $n = 3$. Följande tabell visar den tid i sekunder det tog att hitta koefficienterna c_i på en viss dator genom MATLABs `polyfit` kommando.

m	$5 \cdot 10^5$	$1.5 \cdot 10^6$	$4.5 \cdot 10^6$	$1.35 \cdot 10^7$	$4.05 \cdot 10^7$
t	0.0999	0.1641	0.4474	1.3060	3.9111

   Vilken aritmetiska komplexitet har `polyfit`? (1p)

   (b) Den tid i sekunder det tog att beräkna polynomet $p(x)$ för ett x värde genom MATLABs `polyval` kommandot visas i följande tabell.

n	$3 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^6$	$1.2 \cdot 10^7$	$2.4 \cdot 10^7$	$4.8 \cdot 10^7$	$9.6 \cdot 10^7$
t	0.0426	0.0729	0.1396	0.3136	0.6446	1.3022

   Vilken aritmetisk komplexitet har `polyval`? (1p)

   (c) Verkar `polyval` använda Horners schema? Motivera ditt svår. (1p)

7. Centraldifferens $D_0 f = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$ har använts för att beräkna derivatan till $f(x) = \sin(x)$ i $x_0 = 0.5$. Beräkningsfel följer.

h	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
fel	$6.77 \cdot 10^{-6}$	$1.22 \cdot 10^{-6}$	$1.11 \cdot 10^{-7}$	$1.46 \cdot 10^{-9}$	$1.46 \cdot 10^{-7}$	$1.46 \cdot 10^{-5}$

   (a) Vilken noggrannhetsordning förväntas? Stämmer den? (1p)

   (b) Förklara varför det inte lönar sig att använda ett alltför litet h. (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Låt $\overline{x}$ var en korrekt avrundad representation av talet x i ett flyttalssystem med basen b, t siffror i bråkdelen och exponent mellan $e_{\min}$ och $e_{\max}$. Visa att

   $$\frac{|\overline{x} - x|}{|x|} \leq \mu$$

   där $\mu = \varepsilon_M / 2$ och ε_M är maskinepsilon. (1p)

   (b) Visa att triangulära ekvationssystem med n obekanta kan lösas med n^2 aritmetiska operationer. (1p)

   (c) Visa att det lokala trunkeringsfelet för Euler bakåt är $\mathcal{O}\left(h^2\right)$. (1p)

   (d) Härled stabilitetsvillkoret för Euler bakåt. (1p)

   (e) Förklara varför Regula-Falsi bör inte användas för att hitta dubbelrötter. (1p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Andrea Ruggiu / Fredrik Berntsson

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2019-01-07

Svar till tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) $\varepsilon_M = 2^{-112} \approx 1.93 \cdot 10^{-34}$.

   (b) Runges fenomen kan uppträda vid interpolation med polynom av hög grad och yttrar sig i så fall i form av stora oscillationer mellan interpolationspunkterna, typiskt i närheten av ändarna på intervallet.

   (c) Noggrannhetsordningen beskriver hur fort minskar trunkeringsfelet med steg h. Om trunkeringsfelet $R_T = \mathcal{O}(h^p)$, noggrannhetsordningen är p.

   (d) Vid lösning av ODE finns ett lokalt trunkeringsfel efter ett steg med metoden. Efter flera steg är felet globalt.

   (e) Funktionen $g(x) = e^x - x$ har ett minimum i $x = 0$, där $g'(x) = e^x - 1$ går till noll. Annars, $g'(x) > 0$ och g är en växande funktion för $x \neq 0$. Men $g(0) = 1$, och det betyder att $g(x) \geq 1$.

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. $z = 1 - \sqrt{1 - x^2} = 1 - \sqrt{1 - a} = 1 - \sqrt{b} = 1 - c = d$.

$$|\Delta z| \lessapprox \left|\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial c}\Delta c\right| + \left|\frac{\partial z}{\partial d}\Delta d\right| = \left|\frac{1}{2\sqrt{1-a}}\Delta a\right| + \left|\frac{1}{2\sqrt{b}}\Delta b\right| + |\Delta c| + |\Delta d|$$
$$\leq \mu\left[\left|\frac{a}{2\sqrt{1-a}}\right| + \left|\frac{b}{2\sqrt{b}}\right| + |c| + |d|\right] \approx \mu\left[\left|\frac{x^2}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}\right| + |1| + \left|\frac{x^2}{2}\right|\right] \approx \frac{3}{2}\mu.$$

Kancellation kan visas från relativt fel $\left|\frac{\Delta z}{z}\right| \approx \frac{3}{2}\frac{\mu}{x^2}$ som är stort när x är små.

3. (a) $A = \begin{pmatrix} -\frac{5}{8} & 2 & -\frac{11}{8} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Byt första och andra raden. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{8} & 2 & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Kvoter: $a_{21}/a_{11} = -5/16$ och $a_{31}/a_{11} = 0$. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Och det leder till $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{5}{16} & \frac{27}{16} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Så

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{5}{16} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{27}{16} & -\frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösningar är $\mathbf{y} = (1, 5/16, 0)^T$ och $\mathbf{x} = (16/27, 5/27, 0)^T$.

   (b) $\|A\|_\infty = 4$, $\|A^{-1}\|_\infty = 32/27$ ger $\kappa_\infty(A) = 128/27 = 4.740740\ldots$. Vi kan också beräkna $\|\mathbf{b}\|_\infty = 1$, $\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty = 0.5 \cdot 10^{-2}$ och

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty} \leq \kappa_\infty(A)\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|_\infty}{\|\mathbf{b}\|_\infty} = 2.37037\ldots \cdot 10^{-2}.$$

4. (a) Kvadratiska spline kan skrivas som

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x), & 0.6 \leq x \leq 0.8 \\ s_2(x), & 0.8 \leq x \leq 1.0 \end{cases} = \begin{cases} a_1 + b_1\left(\frac{x-0.6}{0.2}\right) + c_1\left(\frac{x-0.6}{0.2}\right)^2, & 0.6 \leq x \leq 0.8 \\ a_2 + b_2\left(\frac{x-0.8}{0.2}\right) + c_2\left(\frac{x-0.8}{0.2}\right)^2, & 0.8 \leq x \leq 1.0 \end{cases}$$

Vi vet att

$$s_1'(x) = \frac{b_1}{0.2} + \frac{c_1}{0.02}(x - 0.6), \qquad s_2'(x) = \frac{b_2}{0.2} + \frac{c_2}{0.02}(x - 0.8)$$

och koefficienterna kan bestämmas med

$$\begin{cases} s_1(0.6) &= 1.20, \\ s_1(0.8) &= s_2(0.8), \\ s_2(1) &= 0.60, \\ s_1'(0.6) &= 0, \\ s_1'(0.8) &= s_2'(0.8) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a_1 &= 1.20, \\ a_1 + b_1 + c_1 &= 0.75, \\ a_2 &= 0.75, \\ a_2 + b_2 + c_2 &= 0.60, \\ \frac{b_1}{0.2} &= 0, \\ \frac{b_1}{0.2} + 10c_1 &= \frac{b_2}{0.2}. \end{cases}$$

Vi får

$$s(x)=\begin{cases}1.20-0.45\left(\frac{x-0.6}{0.2}\right)^2, & 0.6\le x\le 0.8\\ 0.75-0.90\left(\frac{x-0.8}{0.2}\right)+0.75\left(\frac{x-0.8}{0.2}\right)^2, & 0.8\le x\le 1.0\end{cases}$$

och $f(0.9)\approx s_2(0.9)=0.4875$.

(b)

$$\int_{0.6}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\approx T(0.2)=\frac{0.2}{2}(1.20+2\cdot 0.75+0.60)=0.33$$

$$|\Delta T(0.2)|\lessapprox\frac{0.2}{2}\left(4\cdot 0.5\cdot 10^{-2}\right)=2\cdot 10^{-3}.$$

(c) Med Lagrange metod

$$p(x)=1.0\frac{(x-0.75)(x-1.20)}{(0.60-0.75)(0.60-1.20)}+0.8\frac{(x-0.60)(x-1.20)}{(0.75-0.60)(0.75-1.20)}+0.6\frac{(x-0.60)(x-0.75)}{(1.20-0.60)(1.20-0.75)}$$

och $f^{-1}(0.8)\approx p(0.8)=0.74814\ldots$.

5. (a) Låt $u=y'$ och $x_0=0$, $x_1=0.1$, $x_2=0.2$, $x_3=0.3$ ($h=0.1$). Problemet

$$\mathbf{z}'=\begin{pmatrix}y\\u\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}u\\-x^2y+3x\end{pmatrix}=\mathbf{f}(\mathbf{z},x)$$

kan lösas med Euler framåt:

$$\begin{pmatrix}y_{k+1}\\u_{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_k+hu_k\\u_k+h\left(-x_k^2y_k+3x_k\right)\end{pmatrix}$$

Man får $y_1=1$, $u_1=0$, $y_2=1$, $u_2=0.029$, $y_3=1.0029$.

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. (a) Låt $t(m)\approx cm^p$. Studera kvoten $|t(3m)|/|t(m)|\approx 3^p$

m	$\lvert t(m)\rvert$	$\lvert t(3m)\rvert/\lvert t(m)\rvert$
$5\cdot 10^5$	0.0999	1.6426
$1.5\cdot 10^6$	0.1641	2.7264
$4.5\cdot 10^6$	0.4474	2.9191
$1.35\cdot 10^7$	1.3060	2.9947
$4.05\cdot 10^7$	3.9111	

så $p=1$.

(b) Låt $t(n)\approx kn^q$. Studera kvoten $|t(2n)|/|t(n)|\approx 2^q$

n	$\lvert t(n)\rvert$	$\lvert t(2n)\rvert/\lvert t(n)\rvert$
$3\cdot 10^6$	0.0426	1.7113
$6\cdot 10^6$	0.0729	1.9150
$1.2\cdot 10^7$	0.1396	2.2464
$2.4\cdot 10^7$	0.3136	2.0555
$4.8\cdot 10^7$	0.6446	2.0202
$9.6\cdot 10^7$	1.3022	

så $q=1$.

(c) Beräkningen av ett polynom med Horners schema har komplexitet $\mathcal{O}(n)$. Det är rimligt att anta att MATLAB använder Horners schema.

7. (a) Felkvoterna fel$(10h)/$fel(h) är

h	10^{-12}	10^{-11}	10^{-10}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}
fel	$6.77\cdot 10^{-6}$	$1.22\cdot 10^{-6}$	$1.11\cdot 10^{-7}$	$1.46\cdot 10^{-9}$	$1.46\cdot 10^{-7}$	$1.46\cdot 10^{-5}$
felkvot	0.18	0.09		100	100	

och förväntades noggrannhetsordningen är 2. Det stämmer bara för $h\in\left[10^{-4},10^{-2}\right]$.

(b) Trunkeringsfelet (som ger noggrannhetsordningen) beror på h^2 och minskar då $h\to 0$ medan beräkningsfelen istället beror på h^{-2} och ökar då $h\to 0$. Det beror på att det är kancellation i uttrycket.

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Ett reellt tal på formen $x = m \cdot b^e$ är normaliserat om $1 \leq |m| < b$. För att representera talet x i ett flyttalssystem med t siffror i bråkdelen behöver m avrundas till $\overline{m}$. Eftersom de tal mellan 1 och b som kan representeras exakt i flyttalssystem sitter på avstånd ε_M gäller att

$$|\overline{m} - m| \leq \frac{\varepsilon_M}{2}$$

och

$$\frac{|\overline{x} - x|}{|x|} = \frac{|\overline{m} \cdot b^e - m \cdot b^e|}{|m \cdot b^e|} = \frac{|\overline{m} - m|}{|m|} \leq \frac{\varepsilon_M}{2}.$$

(b) T.ex. systemet $L\mathbf{x} = \mathbf{b}$, med $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ undertriangulära, kan skrivas som

$$\begin{pmatrix} l_{11} & & & & \\ l_{21} & l_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

För att lösa första ekvationen behover vi en a.o.: $x_1 = b_1/l_{11}$. Andra ekvationen är löst med 3 a.o.: $x_2 = (b_2 - l_{21} \cdot x_1)/l_{22}$. Den k:e ekvationen ger

$$x_k = \frac{b_k - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} \cdot x_m}{l_{kk}}$$

som kan beräknas med $2(k-1)+1$ a.o.. Komplexitet beräknas som

$$\sum_{k=1}^{n} [2(k-1)+1] = 2\sum_{k=1}^{n}(k-1) + n = 2\sum_{k=0}^{n-1} k + n = 2\frac{n(n-1)}{2} + n = n^2.$$

(c) En Taylorutveckling ger

$$\begin{aligned} l_k &= y(x_k) - y(x_k - h) - hf(x_k, y(x_k)) \\ &= y_k - \left[y_k - hy'(x_k) + \mathcal{O}(h^2)\right] - hf_k = \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

eftersom $y' = f$.

(d) Euler bakåt på testekvationen $y' = \lambda y$ med $h_k = h$ ger

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_{k+1} \quad \Rightarrow \quad y_{k+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_k.$$

Amplifikationsfaktor $(1-h\lambda)^{-1}$ ger stabilitetsvillkor $|1-h\lambda|^{-1} \leq 1$, det vill säga om $|1-h\lambda| \geq 1$, vilket är sant för alla $h \geq 0$ om $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Euler bakåt är därmed en ovillkorligt stabilt metod.

(e) Regula-Falsi kräver $f(x_{k+1}) \cdot f(x_k) < 0$ i varje iteration k, som kan vara aldrig sant om man studerar problem med dubbelrötter.