Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Andrea Ruggiu / Fredrik Berntsson

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2018-10-26

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $8^{00} - 12^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Hur många korrekta decimaler och signifikanta siffror har $\overline{\pi} = 3.1415$? Kom ihåg: $\pi = 3.1415926535\ldots$ (1p)

   (b) Förklara vad som menas med en algoritms aritmetiska komplexitet. (1p)

   (c) Vad är det för skillnad på approximation och interpolation? Kan minsta kvadratmetoden användas för att bestämma en kurva som går genom givna punkter? (1p)

   (d) Skriv om $y''' + x^2 y' = y + \cos(x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$, till system av första ordningen. (1p)

   (e) Visa att $f(x) = e^{-x}$ har en fixpunkt i intervallet $0 \leq x \leq 2$. (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt $\overline{x} = 2.233$ vara korrekt avrundat. Beräkna $z = \ln(e^x)$ med felgräns. Avrunda svaret $\overline{z}$ till 3 decimaler. (OBS: maximalfelsuppskattningen ska användas.) (1p)

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & -0.2 & -0.3 \\ 0.4 & -0.4 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}.$$
LU-faktorisera A. Använd partiell pivotering. (2p)

4. Låt följande tabell vara given

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$u(x)$	1	$\frac{16}{27}$	$\frac{5}{27}$	0	0

   (a) Uppskatta $u(9/44)$ med hjälp av kvadratisk interpolation med Newton-polynom. (1p)

   (b) Uppskatta $u(9/10)$ med hjälp av kvadratisk interpolation med Lagrange-polynom. (1p)

   (c) Beräkna två approximationer till $u''(1/2)$ med D_+D_-. (1p)

5. Funktionen $\ln(x)$ kan definieras som
$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$
Låt $x = 4.0 \pm 0.5 \cdot 10^{-1}$ och $\overline{x} = 4.0$.

   (a) Beräkna $\ln(\overline{x})$ genom mittpunktsregeln med $h = 1$. (1p)

   (b) Identifiera alla felkällor och göra en grafisk illustration på dem. (1p)

6. (a) Beräkna en numerisk lösning till
$$\begin{aligned} y' &= y\,e^{-x}, \quad 1 < x < 2, \\ y(1) &= 3, \end{aligned}$$
med Euler bakåt och steglängder $h_0 = h_1 = 1/2$. (1p)

(b) Använd D_+D_- och D_0 med $h = 0.25$ för att diskretisera

$$\begin{aligned} -u'' + \left(1 - 16\, x^2\right) u' &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 1, \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Eliminera randvillkoren för att få ett ekvationssystem $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$. Ange A, $\mathbf{v}$ och $\mathbf{b}$. (1p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

7. Diskutera möjligheten att numeriskt beräkna ett noggrant närmevärde till $y = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$ för något $x \approx 0$. (1p)

8. Fuktionen $\cosh(x)$ integreras med Simpson 3/8 regel (liksom vanlig Simpson, men med tredjegradspolynomer istället) över intervallet $[0, 1]$. För olika antal delintervaller, n (som måste vara delbart med tre), har beloppet av trunkeringsfelen uppskattas enligt tabellen nedan.

n	30	60	120	240
$\lvert R_T(n)\rvert$	$8.38 \cdot 10^{-9}$	$5.24 \cdot 10^{-10}$	$3.27 \cdot 10^{-11}$	$2.05 \cdot 10^{-12}$

Den tid, t, i sekunder det tog att göra beräkningarna visas i följande tabell.

n	$3 \cdot 10^6$	$9 \cdot 10^6$	$2.7 \cdot 10^7$	$8.1 \cdot 10^7$
$t(n)$	0.175	0.545	1.660	5.038

(a) Vilken noggrannhetsordning har metoden? (1p)

(b) Vilket n behövs för att trunkeringsfelet ska understiga 10^{-14}? (1p)

(c) Vilken aritmetiska komplexitet har metoden? (1p)

9. Newton-Raphsons metod har använts för att hitta roten $x^* = 1$ till ekvation $x^4 + 2x = 3x^2$. I tabellen nedan finns de fel av de första iterationerna tabulerade. Är konvergensordningen som förväntad? Motivera ditt svar.

k	$\lvert x_k - x^*\rvert$
0	0.1
1	0.529e-1
2	0.273e-1
3	0.139e-1
4	0.701e-2
5	0.352e-2

(1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

10. (a) Visa att

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

för inducerade normer om $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $A(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$. (1p)

(b) Visa att exakt två tilläggsvillkor behövs för att interpolera en funktion $f(x)$ i punkterna $x_i,\ \ i = 1, \ldots, n$ med en kubisk splinefunktion. (1p)

(c) Låt

$$D_2(h) := \frac{3f(x_0) + af(x_0 - h) + bf(x_0 - 2h)}{2h}.$$

Bestäm a och b så att $D_2(h)$ är en andraordningen approximation till förstaderivatan av f i x_0. (1p)

(d) Visa att Newton-Raphsons metod konvergerar kvadratiskt för enkelrötter. (2p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Andrea Ruggiu / Fredrik Berntsson

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2018-10-26

Svar till tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) $\Delta\pi = 9.26 \cdot 10^{-5}$ leder till $|\Delta\pi| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$: 3 KD och 4 SS.

   (b) En algoritms aritmetiska komplexitet är antalet aritmetiska operationer, det vill säga additioner, subtraktioner, multiplikationer och divisioner, som krävs för att utföra algoritmen. Vanligtvis anges den aritmetiska komplexiteten som funktion av en parameter som beskriver problemets storlek.

   (c) Vid interpolation söks en funktion som går genom givna punkter, vilket inte krävs vid approximation. Då anpassas istället en funktion av en viss form till givna data.

   Approximation ofta genomförs med minsta kvadratmetoden: ett ekvationssystem $A\mathbf{c} = \mathbf{y}$ kan lösas i minsta kvadratmening genom att hitta $\mathbf{c}$ som minimerar $\|A\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2$. För att bestämma en kurva som går genom givna punkter, man löser $A\mathbf{c} = \mathbf{y}$ exakt istället. Den rätta lösningen $\mathbf{c}$ också minimerar $\|A\mathbf{c} - \mathbf{y}\|_2 = 0$. Det betyder som minsta kvadratmetoden kan användas också för interpolation.

   (d) Sätt t.ex. $\begin{cases} y = y \\ v = y' \\ u = y'' \end{cases}$ ger $\begin{cases} y' = v, & y(0) = 1, \\ v' = u, & v(0) = -1, \\ u' = y - x^2 v + \cos(x), & u(0) = 0. \end{cases}$

   (e) Sätt $g(x) = e^{-x} - x$: fixpunkter till f är nollställen till g.

   Funktionen g är kontinuerlig i $[0, 2]$, $g(0) = 1 > 0$ och $g(2) = e^{-2} - 2 < 0$. Bolzano sats garanterar att g har en nollställe i intervallet $0 \leq x \leq 2$.

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. OBS: Beräkningar genomförs inte på datorn och alla tal lagras exakt!

   $\overline{z} = \ln\left(e^{\overline{x}}\right) = \overline{x}$ och $\overline{x}$ korrekt avrundat leder till $|\Delta x| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$.

   Låt ξ mellan $\overline{x}$ och x. Medelvärdessatsen ger

$$|\Delta z| = \left| \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=\xi} \Delta x \right| = \left| \frac{1}{e^{\xi}} \cdot e^{\xi} \Delta x \right| = |\Delta x| \leq 0.5 \cdot 10^{-3}$$

   och $z = 2.233 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$. (Maximalfelsuppskattning ger approximativ samma resultat)

3. Byt första och andra raden. $\begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 & -0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$ Kvoter: $a_{21}/a_{11} = 1/2$ och $a_{31}/a_{11} = 3/4$.

   $\left(\begin{array}{c|cc} 0.4 & -0.4 & 0.2 \\ \hline 1/2 & 0 & -0.4 \\ 3/4 & 0.7 & 0.25 \end{array}\right)$ Byt andra och tredje raden. $\left(\begin{array}{c|cc} 0.4 & -0.4 & 0.2 \\ \hline 3/4 & 0.7 & 0.25 \\ 1/2 & 0 & -0.4 \end{array}\right)$

   Kvot: $a_{32}/a_{22} = 0$. $\left(\begin{array}{c|c|c} 0.4 & -0.4 & 0.2 \\ \hline 3/4 & 0.7 & 0.25 \\ \cline{2-2} 1/2 & 0 & -0.4 \end{array}\right)$

   Så $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.7 & 0.25 \\ 0 & 0 & -0.4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. (a) Newton med $x = 0$, $x = \frac{1}{4}$ och $x = \frac{1}{2}$: $p(x) = 1 - \frac{44}{27}x$, $p(\frac{9}{44}) = \frac{2}{3}$.

   OBS: förstagradspolynom för att $(0, 1)$, $(\frac{1}{4}, \frac{16}{27})$ och $(\frac{1}{2}, \frac{5}{27})$ ligger på samma linje.

   (b) Lagrange med $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{4}$ och $x = 1$: $q(x) = \frac{40}{27}\left(x - \frac{3}{4}\right)(x - 1)$, $q\left(\frac{9}{10}\right) = -\frac{1}{45}$.

   (c)

$$D_+ D_- (h)\big|_{x=x_0} = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2}$$

   $u''\left(\frac{1}{2}\right) \approx D_+ D_- (1/4)\big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{32}{9}$.

   $u''\left(\frac{1}{2}\right) \approx D_+ D_- (1/2)\big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{68}{27}$.

5. (a)
$$\ln(\overline{x}) \approx M(1) = 1 \cdot \left[\frac{1}{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\frac{5}{2}} + \frac{1}{\frac{7}{2}}\right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{142}{105} = 1.35238\ldots$$
(b) Trunkeringsfel och felfortplantning av fel i indata. Eventuell avrundingsfel i utdata.

6. (a) Använd Euler bakåt:
$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} = y_{i+1} e^{-x_{i+1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{i+1} = \frac{y_i}{1 - h_i e^{-x_{i+1}}}}$$
$y(1) = y_0 = 3, \quad y(3/2) \approx y_1 = 3.37672\ldots, \quad y(2) \approx y_2 = 3.62180\ldots$

(b) Låt $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \frac{3}{4}$, $x_4 = 1$ och skriv
$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \left(1 - 16x_i^2\right) \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 0, \quad i = 1, 2, 3,$$
där $h = \frac{1}{4}$, $u_0 = 1$, $u_4 = 0$ och $u_i \approx u(x_i)$. Skriv om till system
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -16 & 32 & -16 & & \\ 0 & -10 & 32 & -22 & \\ 0 & 0 & 0 & 32 & -32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
och eliminera randvillkoren för att få $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ med
$$A = \begin{pmatrix} 32 & -16 & 0 \\ -10 & 32 & -22 \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
<u>OBS</u>: Lösningen till problemet ges i 4.

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

7. Om $x \approx 0$ fås kancellation vilket medför stort relativt fel i y. Skriv om som
$$y = \frac{1}{x^2}\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \ldots\right)\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{720}x^4 + \ldots$$
Varannan term blir negativ, men dessa är av olika storlek om beloppet av x är litet.
Annars, man kan skriva om genom att multiplicera med konjugatet
$$y = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{\sin^2(x)}{x^2(1 + \cos(x))}.$$
En tredje alternativ för att undvika kancellationer är att använda den trigonometrisk formeln
$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{x^2}\sin^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

8. (a) Låt $|R_T(n)| \approx cn^{-p}$. Studera felkvoten $|R_T(n)|/|R_T(2n)| \approx 2^p$

n	$\lvert R_T(n)\rvert$	$\lvert R_T(n)\rvert/\lvert R_T(2n)\rvert$
30	$8.38 \cdot 10^{-9}$	15.99
60	$5.24 \cdot 10^{-10}$	16.02
120	$3.27 \cdot 10^{-11}$	15.95
240	$2.05 \cdot 10^{-12}$	

så $p = 4$.

(b) $|R_T(n)| \approx cn^{-4}$ leder till $c \approx |R_T(240)|(240)^4$.
$$|R_T(n_*)| \leq 10^{-14} \quad \Leftrightarrow \quad cn_*^{-4} \leq 10^{-14} \quad \Leftrightarrow \quad n_*^{-4} \leq \frac{10^{-14}}{c} \approx \frac{10^{-14}}{|R_T(240)|(240)^4}.$$
Det betyder att
$$n_* \gtrsim 240 \cdot \sqrt[4]{\frac{|R_T(240)|}{10^{-14}}} = 908.1335\ldots$$
så $n \gtrsim 909$ (antal delintervaller måste vara delbart med tre).

(c) Låt $|t(n)| \approx kn^q$. Studera felkvoten $|t(3n)|/|t(n)| \approx 3^q$

n	$\lvert t(n)\rvert$	$\lvert t(3n)\rvert/\lvert t(n)\rvert$
$3 \cdot 10^6$	0.175	3.11
$9 \cdot 10^6$	0.545	3.05
$2.7 \cdot 10^7$	1.660	3.03
$8.1 \cdot 10^7$	5.038	

så $q = 1$.

9. För att uppskatta konvergensordningen kan man beräkna följande

$$\log\left(\frac{|x_5 - x^*|}{|x_4 - x^*|}\right) / \log\left(\frac{|x_4 - x^*|}{|x_3 - x^*|}\right) = 1.006\ldots \approx 1.$$

$x^* = 1$ är dubbelroten till $x^4 + 2x = 3x^2$. Den förväntade konvergensordningen är därför 1 och vårt resultat stämmer med teorin.

Del D: Härleda teoretiska samband

10. (a) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ och $A(x + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ leder till

$$A\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \|\Delta\mathbf{x}\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|\Delta\mathbf{b}\|.$$

På andra sidan

$$\mathbf{b} = A\mathbf{x} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{b}\| \leq \|A\| \|\mathbf{x}\| \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{x}\| \geq \|A\|^{-1} \|\mathbf{b}\|$$

och

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\left\|A^{-1}\right\| \|\Delta\mathbf{b}\|}{\|A\|^{-1} \|\mathbf{b}\|} = \underbrace{\|A\| \left\|A^{-1}\right\|}_{\kappa(A)} \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}.$$

(b) För att skapa en kubisk splinefunktion s med n punkter ($n-1$ intervall) måste vi bestämma $4(n-1)$ obekanta koefficienter (4 koefficienter för varje tredjegradspolynom). Vi kan använda:

- n ekvationer från n punkter (splinefunktion måste gå genom n givna punkter);
- $3(n-2)$ ekvationer till (vi har $n-2$ invändiga noder där s, s' och s'' måste vara kontinuerlig).

Antal obekanta: $4n-4$; Antal ekvationer: $4n-6$; ... vi behöver exakt två tillägsvillkor.

(c) Med Taylorutvecklingar

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \mathcal{O}\left(h^4\right),$$

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) - \frac{4h^3}{3}f'''(x_0) + \mathcal{O}\left(h^4\right),$$

får vi

$$D_2(h) = \frac{3+a+b}{2h}f(x_0) - \frac{a+2b}{2}f'(x_0) + \frac{h}{4}(a+4b)f''(x_0) - \frac{h^2}{12}(a+8b)f'''(x_0) + \mathcal{O}\left(h^3\right).$$

Systemet

$$\begin{cases} 3+a+b &= 0, \\ a+2b &= -2, \\ a+4b &= 0 \end{cases}$$

har lösningen $a = -4$ och $b = 1$.

(d) Netwon-Raphson metod är en fixpunktiteration

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

med $\varphi(x) = x - f(x)/f'(x)$. Från Taylorutveckling kring x^* följer att

$$\varphi(x_k) = \varphi(x^*) + \varphi'(x^*)(x_k - x^*) + \frac{1}{2}\varphi''(\xi)(x_k - x^*)^2$$

för något ξ mellan x_k och x^*. Om x^* är en enkelrot är $f(x^*) \neq 0$ och

$$\varphi'(x^*) = \ldots = \frac{f(x^*)\, f''(x^*)}{\left(f'(x^*)\right)^2} = 0,$$

så

$$\underbrace{\varphi(x_k)}_{x_{k+1}} - \underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*} = \frac{1}{2}\varphi''(\xi)\,(x_k - x^*)^2\,.$$

Om f är tillräckligt snäll får vi att det finns en konstant C så att

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C\,|x_k - x^*|^2$$

och konvergensen är kvadratisk.