Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $14^{00} - 18^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Ett flyttal $x \approx 7.56 \cdot 10^{29}$ lagras på normaliserad form i ett flyttalssystem med basen 2 och $t = 52$. Beräkna en övre gräns för avrundningsfelet (absoluta felet) som uppstår. (1p)

   (b) Gör en omskrivning av uttrycket $y = \sqrt{x^4 + 4} - 2$ så att kancellation undviks då $|x| \approx 0$. (1p)

   (c) Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & 3 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ och bestäm den av normerna $||A||_\infty$ eller $||A||_1$ som ger minst värde. (1p)

   (d) Förklara hur rötter och nollställen hänger samman. (1p)

   (e) Ge exempel på en implicit metod som löser ordinära differentialekvationer med begynnelsevillkor. Vad är fördelen med sådana metoder? (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt $w = \dfrac{x \cdot y}{z}$, där $x = 1.75$, $y = 7.39$ och $z = 0.271$ alla är korrekt avrundade. Beräkna w med felgräns då $\bar{w}$ avrundats till 2 decimaler. (Maximalfelsuppskattningen ska användas.) (1p)

3. (a) Låt

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ och } b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 26 \end{pmatrix}$$

   LU-faktorisera A. Använd partiell pivotering. (2p)

   (b) Lös $Ax = b$ med hjälp av din LU-faktorisering. (1p)

4. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
$f(x)$	1.0000	0.9385	0.7652	0.5118	0.1639

   (a) Uppskatta $f(1.7)$ med hjälp av kvadratisk interpolation med Newton-polynom. (1p)

   (b) Uppskatta $f(1.7)$ med hjälp av det förstagradspolynom som approximerar alla punkterna i minsta kvadratmening. (1p)

   (c) Avgör om

$$s(x) = \begin{cases} 1.0000 - 0.0615(\frac{x-1.0}{0.3})^2, & 1.0 \le x \le 1.3, \\ 0.9385 - 0.123(\frac{x-1.3}{0.3}) - 0.0503(\frac{x-1.3}{0.3})^2, & 1.3 \le x \le 1.6, \end{cases}$$

   är den kvadratiska spline som interpolerar de 3 första punkterna i tabellen och uppfyller villkoret $s'(1.0) = 0$. (1p)

5. Lös ekvationen $\dfrac{1}{x} - 6 = 0$ med Newton-Raphsons metod. Gör en iteration med $x_0 = 0.16$. Uppskatta felet i x_1 med metodoberoende feluppskattningen(approximativt räcker). (1p)

6. Använd Euler framåt med $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(1.3)$ då $y'' = y - 2xy, \quad y(1) = -1, \ y'(1) = 2.$ (2p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

7. En funktion $f(x)$ integreras med en numerisk metod över intervallet $[0,\ 1]$. Följande trunkeringsfel har uppskattats för olika steglängder h:

h	0.25	0.125	0.0625
$\lvert R_T(h)\rvert$	$1.3021 \cdot 10^{-3}$	$8.1380 \cdot 10^{-5}$	$5.0863 \cdot 10^{-6}$

   (a) Vilken noggrannhetsordning har metoden? (1p)

   (b) Vilket h behövs för att trunkeringsfelet ska understiga 10^{-8}? (1p)

8. (a) Derivatan i $x = 1$ för en funktion $f(x)$ har beräknats numeriskt med differensapproximationen D_0 för olika steglängder h, enligt tabellen nedan.

h	1/3	1/9	1/27	1/81
$D_0 f(1)$	2.76890078	2.72387845	2.71890333	2.71835088

   Vilken noggrannhetsordning förväntas? Stämmer den? (1p)

   (b) Förklara varför det inte lönar sig att använda ett alltför litet h. (1p)

9. Under vilka förutsättningar är Newtons metod att föredra framför Lagranges metod vid interpolation? Motivera utförligt. (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

10. (a) Låt $S = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$ med exakta termer t_i. Visa att beräkningsfelet från additionerna uppfyller $|\Delta S| \lesssim \mu(n|t_0| + n|t_1| + (n-1)|t_2| + (n-2)|t_3| + \cdots + |t_n|)$. (1p)

    (b) Visa att interpolation med Newtons metod ger ett undertriangulärt ekvationssystem med entydig lösning, under antagandet att punkternas x-koordinater är distinkta. (1p)

    (c) Visa att triangulära ekvationssystem med n obekanta kan lösas med n^2 aritmetiska operationer. (1p)

    (d) Visa att

$$\frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = f''(x) + ch^2 + O(h^4)$$

    och ange uttrycket för c.

    (1p)

    (e) Härled stabilitetsvillkoret för Euler framåt. (1p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TANA22
2018-08-27

Svar till tentamen i TANA21/22 Beräkningsmatematik

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) $\mu = 0.5 \cdot 2^{-52}$ och $|\Delta x| \le \mu \cdot 7.56 \cdot 10^{29} \le 8.4 \cdot 10^{13}$

   (b) $y = \dfrac{(\sqrt{x^4+4}-2)(\sqrt{x^4+4}+2)}{\sqrt{x^4+4}+2} = \dfrac{x^4}{\sqrt{x^4+4}+2}$

   (c) $||A||_\infty = 13$

   (d) Ett nollställe till funktionen $f(x)$ är en rot till ekvationen $f(x) = 0$ och tvärtom.

   (e) Euler bakåt eller trapetsmetoden. De är stabila för alla $h > 0$ och speciellt lämpliga för s.k. styva system av differentialekvationer.

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Sätt $f(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{z}$; $\quad x = 1.75 \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$; $\quad y = 7.39 \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$; $\quad z = 0.271 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$;

   $$|\Delta f| \lesssim |\frac{y}{z}\Delta x| + |\frac{x}{z}\Delta y| + |\frac{-xy}{z^2}\Delta z| \le |\frac{7.39}{0.271}0.005| + |\frac{1.75}{0.271}0.005| + |\frac{1.75 \cdot 7.39}{0.271^2}0.0005| \le 0.26$$

   $\bar{w} = 47.72$ ger $|R_B| \le 0.5 \cdot 10^{-2}$ och $|\Delta w| \le 0.26 + 0.5 \cdot 10^{-2} \le 0.27$ Svar: $w = 47.72 \pm 0.27$

3. (a) Byt första och andra raden. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ Kvoter: $a_{21}/a_{11} = -1/5$ och $a_{31}/a_{11} = 0/5$.

   $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -0.2 & 1.4 & 0.2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ Byt andra och tredje raden. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -0.2 & 1.4 & 0.2 \end{pmatrix}$

   Kvot: $a_{32}/a_{22} = 1.4/4$. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -0.2 & 0.35 & -0.85 \end{pmatrix}$

   Så $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0.35 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad U = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -0.85 \end{pmatrix}$, $\quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $Ly = Pb \quad \Leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 26 \\ -0.2 & 0.35 & 1 & 3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 5 \\ 26 \\ -5.1 \end{pmatrix}$

   $Ux = y \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 26 \\ 0 & 0 & -0.85 & -5.1 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

4. (a) Newton med $x = 1.3,\ x = 1.6$ och $x = 1.9$:
   $p(x) = 0.9385 - 0.57766.. \cdot (x-1.3) - 0.445(x-1.3)(x-1.6) \qquad p(1.7) = 0.6896333...$

   Det går också bra att använda Newton med $x = 1.6,\ x = 1.9$ och $x = 2.2$:
   $q(x) = 0.7652 - 0.8447(x-1.6) - 0.5249(x-1.6)(x-1.9) \qquad q(1.7) = 0.691233$

   (b) Ansats på bra form: $p(x) = c_0 + c_1(x-1.6)$. Alla data i ansatsen ger

   $$\begin{pmatrix} 1 & -0.6 \\ 1 & -0.3 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0.3 \\ 1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9385 \\ 0.7652 \\ 0.5118 \\ 0.1639 \end{pmatrix}$$

   Normalekvationerna blir

   $$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.3794 \\ -0.62967 \end{pmatrix} \text{ ger } c_0 = 0.67588,\ c_1 = -0.699633..$$

$p(x) = 0.67588 - 0.699633..(x - 1.6)$ så $p(1.7) = 0.6059166..$

(c) $\begin{cases} s_1(x) = 1.0000 - 0.0615 \left(\frac{x-1}{0.3}\right)^2, & 1.0 \le x \le 1.3 \\ s_2(x) = 0.9385 - 0.123 \left(\frac{x-1.3}{0.3}\right) - 0.0503 \left(\frac{x-1.3}{0.3}\right)^2, & 1.3 \le x \le 1.6 \end{cases}$

Kontrollera att $s_1(1.0) = 1$, $s_1(1.3) = 0.9385$, $s_2(1.3) = 0.9385$, $s_2(1.6) = 0.7652$, $s'(1.0) = 0$ och $s_1'(1.3) = s_2'(1.3)$.

$s_1'(x) = \dfrac{-2 \cdot 0.0615}{0.3}\left(\dfrac{x-1}{0.3}\right) \qquad s_2'(x) = \dfrac{-0.123}{0.3} + \dfrac{-2 \cdot 0.0503}{0.3}\left(\dfrac{x-1.3}{0.3}\right)$ ger

$s_1'(1) = 0$, OK $s_1'(1.3) = -0.41$, $\quad s_2'(1.3) = -0.41$ OK

Interpolationsvillkoren stämmer också så detta är den rätta kvadratiska splinefunktionen.

5. $x_{i+1} = x_i - \dfrac{\frac{1}{x_i} - 6}{\frac{-1}{x_i^2}} = 2x_i - 6 \cdot x_i^2$; $\qquad x_0 = 0.16$ ger $x_1 = 0.1664$.

uppskattat fel: $|x_1 - x^*| \le \dfrac{|\frac{1}{x_1} - n|}{|\frac{-1}{x_1^2}|} \le 2.67 \cdot 10^{-4}$ (verkligt fel: $|x_1 - x^*| \le |0.1664 - 1/6| \le 2.67 \cdot 10^{-4}$)

6. Skriv om till system: Sätt t.ex. $\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases}$ ger $\begin{cases} u' = v, & u(1) = -1, \\ v' = (1-2x)u, & v(1) = 2. \end{cases}$

Euler framåt ger

$u_{i+1} = u_i + hv_i$

$v_{i+1} = v_i + h(1 - 2x_i)u_i$

$u_1 = -0.8, \quad u_2 = -0.59, \quad u_3 = -0.3704 \approx y(1.3)$

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

7. (a) Studera felkvoten $|R_T(2h)|/|R_T(h)| \approx 2^p$

h	$\|R_T(h)\|$	$\|R_T(2h)\|/\|R_T(h)\|$
0.25	$1.3021 \cdot 10^{-3}$	
0.125	$8.1380 \cdot 10^{-5}$	16
0.0625	$5.0863 \cdot 10^{-6}$	16

så $p = 4$.

(b) $c \cdot h^4 \approx 5.0863 \cdot 10^{-6}$ ger $c \approx 0.33$; $ch^4 = 10^{-8}$ ger då $h \approx 1.3 \cdot 10^{-2}$, dvs 76 delintervall. (Metoden är Simpsons regel som dessutom kräver jämnt antal delintervall.)

8. (a) Ansätt $Df(1; h) \approx c_0 + c_p h^p$. Formeln

$$\frac{Df(1;9h) - Df(1;3h)}{Df(1;3h) - Df(1;h)} \approx \frac{c_0 + c_p(9h)^p - (c_0 + c_p(3h)^p)}{c_0 + c_p(3h)^p - (c_0 + c_p h^p)} = \frac{(9h)^p - (3h)^p}{(3h)^p - h^p} = 3^p$$

ger 9.049.. för $h = 1/27$, och 9.00.. för $h = 1/81$, vilket tyder på att noggrannhetsordningen är 2.

(b) Trunkeringsfelet beror på h eller h^2 och minskar då $h \to 0$ medan beräkningsfelen istället beror på $\frac{1}{h}$ eller $\frac{1}{h^2}$ och ökar då $h \to 0$. Det beror på att det är kancellation i uttrycket. Ett optimalt $h > 0$ finns och ett alltför litet h medför ett större fel i resultatet p.g.a. beräkningsfelen.

9. Att evaluera ett Newtonpolynom av grad n är billigare ($O(n)$ a.o. om Horners schema används) än att evaluera ett Lagrangepolynom ($O(n^2)$ a.o.) Newtons metod är alltså att föredra framför Lagranges metod om interpolationspolynomet ska evalueras många gånger.

Del D: Härleda teoretiska samband

10. (a) $S = \underbrace{\underbrace{\underbrace{t_0 + t_1}_{s_1} + t_2}_{s_2} + \cdots + t_n}_{s_n}$ Det gäller $\dfrac{|\Delta s_i|}{|s_i|} \leq \mu$; Maximalfelsuppskattning ger

$$|\Delta S| \lesssim \left|\frac{\partial S}{\partial s_1}\Delta s_1\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial s_2}\Delta s_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial S}{\partial s_n}\Delta s_n\right| = |\Delta s_1| + |\Delta s_2| + \cdots + |\Delta s_n| \leq$$
$$\mu(|t_0 + t_1| + |t_0 + t_1 + t_2| + \cdots + |t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n|) \leq$$
$$\mu(|t_0| + |t_1| + |t_0| + |t_1| + |t_2| + \cdots + |t_0| + |t_1| + |t_2| + \cdots + |t_n|) \leq$$
$$\mu(n|t_0| + n|t_1| + (n-1)|t_2| + (n-2)|t_3| + \cdots + 2|t_{n-1}| + |t_n|)$$

(b) Se exempelsamlingen 3.36.

(c) Ansats: $p_n(x) = c_1 + c_2(x - x_1) + c_3(x - x_1)(x - x_2) + \cdots c_{n+1}(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

Ekvationerna blir

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 \cdot 1 & = f_1 \\ c_1 \cdot 1 + c_2(x_2 - x_1) & = f_2 \\ c_1 \cdot 1 + c_2(x_3 - x_1) + c_3(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) & = f_3 \\ \vdots & \\ c_1 \cdot 1 + \cdots + c_{n+1}(x_{n+1} - x_1)\cdots(x_{n+1} - x_n) & = f_{n+1} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow Ac = f$$

Lösbart om $\det(A) \neq 0$.

$\det(A) = 1 \cdot (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)\cdots(x_{n+1} - x_1)(x_{n+1} - x_2)\cdots(x_{n+1} - x_n)$

dvs $x_2 \neq x_1$, $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2, \ldots$ krävs, så alla x_i måste ha olika värden.

(d) $f(x - h) = f(x) - hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x) - \dfrac{h^3}{3!}f'''(x) + \dfrac{h^4}{4!}f^{iv}(x) - \dfrac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \ldots$

$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \dfrac{h^2}{2}f''(x) + \dfrac{h^3}{3!}f'''(x) + \dfrac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \dfrac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \ldots$

$$\frac{1}{h^2}\Big(f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)\Big) =$$
$$= \frac{1}{h^2}\Big[f(x)\cdot(1-2+1) + hf'(x)\cdot(-1+1) + \frac{h^2}{2!}f''(x)(1+1) + \frac{h^3}{3!}f'''(x)\cdot(-1+1) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x)(1+$$
$$1) + \frac{h^5}{5!}f^{v}(x)(-1+1) + \ldots] = f''(x) + \frac{h^2}{12}f^{iv}(x) + O(h^4)$$

Svar: $R_T = ch^2 + O(h^4)$, där $c = \frac{1}{12}f^{iv}(x)$.

(e) Euler framåt på testekvationen $y' = \lambda y$ (λ negativt) ger $y_{i+1} = (1 + h\lambda)y_i$

Det krävs att $|1 + h\lambda| \leq 1$ dvs $-1 \leq 1 + h\lambda \leq 1$.

Olikheterna ger $0 \leq h \leq \dfrac{-2}{\lambda}$