Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2018-01-05

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $8^{00} - 12^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Skriv talet 648312975 på normaliserad form i ett flyttalssystem med bas 10, 4 decimaler och exponent mellan -9 och 9. (1p)

   (b) Förklara hur trunkeringsfelet och hur avrundningsfelet påverkar resultatet vid beräkning av differenskvoter. (Varför lönar det sig inte att använda ett alltför litet h?) (1p)

   (c) Bestäm en Gausstransformation M så att

$$M \begin{pmatrix} -2 & 9 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \\ 3 & 17 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   för några a_{22}, a_{23}, a_{32} och a_{33}. (1p)

   (d) Illustrera, med en figur, ett illa-konditionerat ekvationssystem med en 2×2-matris. (1p)

   (e) Skriv om $y''' = 7y'' + 3y' - 2y + x,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 4,\ y''(0) = -1$, till system av första ordningen. Skriv systemet på matrisform, $z' = Az + b$. (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt $w = \dfrac{x \cdot y}{z}$

   (a) Antag att de relativa felen i x, y och z alla är mindre än 5%. Gör en uppskattning (mha. maximalfelsuppskattningen) av det relativa felet i w. (1p)

   (b) Antag att alla beräkningar utförs med ett relativt fel $\leq \mu$. Gör en beräkningsfelsanalys för w. Svara med ett uttryck för det relativa felet. (x, y och z antas nu vara exakta.) (1p)

3. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	1.0	1.3	1.6	1.9	2.2
$f(x)$	1.0000	0.9385	0.7652	0.5118	0.1639

   (a) Uppskatta $f(1.5)$ med hjälp av kvadratisk interpolation. (1p)

   (b) Uppskatta $f(1.5)$ med hjälp av det andragradspolynom som approximerar alla punkterna i minsta kvadratmening. (1p)

   (c) Uppskatta $f(1.5)$ med hjälp av den kvadratiska spline som interpolerar de 3 första punkterna och uppfyller villkoret $s'(1.0) = 0$. (2p)

   (d) Beräkna bästa möjliga approximation till $\int_{1.0}^{2.2} f(x)\,dx$ med Simpsons formel, samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

4. För att beräkna tal av typen $1/n$ utan att använda division kan man lösa ekvationen $\dfrac{1}{x} - n = 0$ med Newton-Raphsons metod. Använd ett divisionsfritt uttryck och gör en iteration med $x_0 = 0.16$, då $n = 6$. Uppskatta felet i x_1 med metodoberoende feluppskattningen (approximativt räcker). (1p)

5. (a) Använd Euler framåt med $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(1.3)$ då $y' = -2xy, \quad y(1) = -1.$ (1p)

   (b) Betrakta nu $u'' + xu' - u = 5 + x, \quad u(-2) = 0.7, \quad u(0) = -0.2.$
   Bandmatrismetoden (finita differensmetoden) med $h = 0.5$ ska användas för att beräkna en approximation till lösningen. Ange, med siffror, på valfri form det ekvationssystem som behöver lösas. (1p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. Ett program för Newton-Raphsons metod ger följande resultat vid test av en ekvation med känd rot $x^* = \sqrt{2}$:

i	x_i	$\lvert f(x_i)\rvert$	$\lvert x_i - x^*\rvert \le$
0	1.400000000000000	0.000202025	0.014213562
1	1.407106781186548	0.000050506	0.007106781
2	1.410660171779822	0.000012626	0.003553391
3	1.412436867076458	0.000003156	0.001776696

   (a) Vilken konvergensordning förväntas? Stämmer den? (1p)

   (b) Differentialekvationen $y' = xy^2, \quad y(0) = 1$, ska i första steget lösas med trapetsmetoden kombinerad med fixpunktsiterationen

$$z_{i+1} = 1 + 0.045 \cdot z_i^2$$

   för att beräkna $y_1 = z$, då $h = 0.3$. Avgör förutsättningarna för att lösa problemet. (Löses rätt ekvation? Konvergerar metoden snabbt/långsamt/inte alls?) (1p)

7. LU-uppdelningen för en $n \times n$-matris A har beräknats och L-matrisen används sedan för att lösa ekvationssystemet $Ly = Pb$.

   (a) Följande tabell visar den tid i sekunder det tog att lösa $Ly = Pb$ på en viss dator.

n	1000	2000	4000	8000
t	0.00181	0.00483	0.0174	0.0662

   Är den aritmetiska komplexiteten som förväntad? (1p)

   (b) Ett ekvationssystem $Ax = b$ löstes med $b = (2,\ 2,\ 2,\ 2)^T$. När högerledet ändrades till $\tilde{b} = (2.1,\ 1.9,\ 2.1,\ 1.9)^T$ ändrades lösningen från $x = (1.1037,\ 0.9132,\ 0.6464,\ 2.0290)^T$ till $\tilde{x} = (0.9249,\ 0.6488,\ 0.8932,\ 2.4126)^T$. Bedöm om ändringen i lösningen är rimlig då $\kappa_\infty(A) \approx 12.23$. (1p)

   (c) Ekvationssystemet $Ax = b$ ska lösas i Matlab då $A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 10^{-13} & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Bedöm förutsättningarna för att erhålla god noggrannhet utan partiell pivotering. (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Visa att ett Newtonpolynom av grad n kan evalueras i $O(n)$ aritmetiska operationer. (2p)

   (b) Visa att $\left| \int_{x_0}^{x_1} f(x)\, dx - T(h) \right| \le c \cdot h^3$ där $T(h)$ är trapetsregeln, c en konstant och $x_1 - x_0 = h$. (1p)

   (c) Visa att det lokala trunkeringsfelet för Euler bakåt är $O(h^2)$. (1p)

   (d) Härled stabilitetsvillkoret för Euler bakåt. (1p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TANA22
2018-01-05

Svar till tentamen i TANA21/22 Beräkningsmatematik

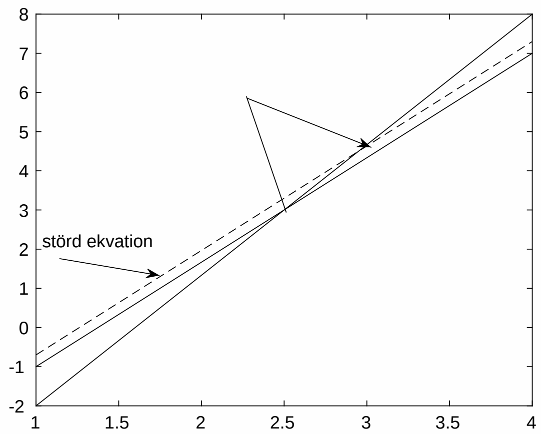
Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) $6.4831 \cdot 10^8$

   (b) Trunkeringsfelet beror på h eller h^2 och minskar då $h \to 0$ medan beräkningsfelen istället beror på $\frac{1}{h}$ eller $\frac{1}{h^2}$ och ökar då $h \to 0$. Det beror på att det är kancellation i uttrycket. Ett optimalt $h > 0$ finns och ett alltför litet h medför ett större fel i resultatet p.g.a. beräkningsfelen.

   (c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1.5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) Illa konditionerat: om högerledet störs flyttas lösningen (skärningspunkten) mycket.



   (e) Sätt t.ex. $\begin{cases} u = y \\ v = y' \\ w = y'' \end{cases}$ ger $\begin{cases} u' = v, & u(1) = 2, \\ v' = w, & v(1) = 4, \\ w' = 7w + 3v - 2u + x & w(0) = -1 \end{cases}$

   På matrisform: $\begin{pmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. (a) $w = \dfrac{x \cdot y}{z}, \qquad \dfrac{|\Delta x|}{|x|} \leq 0.05, \quad \dfrac{|\Delta y|}{|y|} \leq 0.05, \quad \dfrac{|\Delta z|}{|z|} \leq 0.05$

   $|\Delta w| \lesssim |\dfrac{y}{z}\Delta x| + |\dfrac{x}{z}\Delta y| + |\dfrac{-xy}{z^2}\Delta w| \leq |\dfrac{xy}{z}0.05| + |\dfrac{xy}{z}0.05| + |\dfrac{xy}{z}0.05| = 3|w|0.05$

   <u>Svar:</u> $\dfrac{|\Delta w|}{|w|} \lesssim 0.15$

   (b) $w = \dfrac{\overbrace{x \cdot y}^{a}}{z}\}b, \qquad w = \dfrac{a}{z} = b, \qquad \dfrac{|\Delta a|}{|a|} \leq \mu, \quad \dfrac{|\Delta b|}{|b|} \leq \mu,$

   $|\Delta w| \lesssim |\dfrac{1}{z}\Delta a| + |1 \cdot \Delta b| \leq |\dfrac{1}{z}\mu(xy)| + |\mu\dfrac{xy}{z}| = 2\mu|w| \qquad$ <u>Svar:</u> $\dfrac{|\Delta w|}{|w|} \lesssim 2\mu$

3. (a) T.ex. enligt Lagrange: med $x = 1.3,\ x = 1.6$ och $x = 1.9$, (bäst då $f(1.5)$ söks)

   $p(x) = 0.9385\dfrac{(x-1.6)(x-1.9)}{(1.3-1.6)(1.3-1.9)} + 0.7652\dfrac{(x-1.3)(x-1.9)}{(1.6-1.3)(1.6-1.9)} + 0.5118\dfrac{(x-1.3)(x-1.6)}{(1.9-1.3)(1.9-1.6)};$

   $p(1.5) = 0.831866...$

   eller Newton: $p(x) = 0.9385 - 0.57766.. \cdot (x-1.3) - 0.445(x-1.3)(x-1.6)$

(b) Ansats på bra form: $p(x) = c_0 + c_1(x-1.6) + c_2(x-1.6)^2$. Alla data i ansatsen ger

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.6 & 0.36 \\ 1 & -0.3 & 0.09 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.3 & 0.36 \\ 1 & 0.6 & 0.36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0.9385 \\ 0.7652 \\ 0.5118 \\ 0.1639 \end{pmatrix}$$

Normalekvationerna blir

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0.9 \\ 0 & 0.9 & 0 \\ 0.9 & 0 & 0.2754 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3.3794 \\ -0.62967 \\ 0.549531 \end{pmatrix} \text{ ger } c_0 = 0.769151.., c_1 = -0.699633.. \; c_2 = -0.518174..$$

$p(x) = 0.769151.. - 0.699633..(x-1.6) - 0.518174(x-1.6)^2$ så $p(1.5) = 0.833933..$

(c) $$\begin{cases} s_1(x) = a_1 + b_1\left(\frac{x-1}{0.3}\right) + c_1\left(\frac{x-1}{0.3}\right)^2, & 1 \le x \le 1.3 \\ s_2(x) = a_2 + b_2\left(\frac{x-1.3}{0.3}\right) + c_2\left(\frac{x-1.3}{0.3}\right)^2, & 1.3 \le x \le 1.6 \end{cases}$$

$$s_1'(x) = \frac{b_1}{0.3} + \frac{2c_1}{0.3}\left(\frac{x-1}{0.3}\right) \qquad s_2'(x) = \frac{b_2}{0.3} + \frac{2c_2}{0.3}\left(\frac{x-1.3}{0.3}\right)$$

$s_1'(1) = \dfrac{b_1}{0.3} = 0$ ger $b_1 = 0$; $s_1(1) = a_1 = 1$; $s_1(1.3) = a_1 + b_1 + c_1 = 0.9385$ ger $c_1 = -0.0615$

$s_2(1.3) = a_2 = 0.9385$; $\qquad s_1'(1.3) = s_2'(1.3)$ ger $\dfrac{2c_1}{0.3} = \dfrac{b_2}{0.3}$ så $b_2 = -0.123$

$s_2(1.6) = a_2 + b_2 + c_2 = 0.7652$ ger $c_2 = -0.0503$

$$s_2(1.5) = 0.9385 - 0.123\left(\frac{1.5-1.3}{0.3}\right) - 0.0503\left(\frac{1.5-1.3}{0.3}\right)^2 = 0.834144..$$

(d) $S(h) = (h/3)(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4)$
$S(0.3) = (0.3/3)(1 + 4\cdot 0.9385 + 2\cdot 0.7652 + 4\cdot 0.5118 + 0.1639) = 0.84955$
$|\Delta S| \lesssim (h/3)(|\Delta f_0| + 4|\Delta f_1| + 2|\Delta f_2| + 4|\Delta f_3| + |\Delta f_4|) \le 0.1(12\cdot 0.00005) = 6\cdot 10^{-5}$

4. $x_{i+1} = x_i - \dfrac{\frac{1}{x_i} - n}{\frac{-1}{x_i^2}} = 2x_i - n\cdot x_i^2$; $\qquad n = 6, \quad x_0 = 0.16$ ger $x_1 = 0.1664$.

uppskattat fel: $|x_1 - x^*| \le \dfrac{|\frac{1}{x_1} - n|}{|\frac{-1}{x_1^2}|} \le 2.67\cdot 10^{-4}$ (verkligt fel: $|x_1 - x^*| \le |0.1664 - 1/6| \le 2.67\cdot 10^{-4}$)

5. (a) $y' = -2xy, \quad y(1) = -1, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1, \quad h = 0.1, \quad f(x,y) = -2xy$
$y_{i+1} = y_i - h2x_iy_i = (1 - 2hx_i)y_i$
$y_1 = (1 - 2\cdot 0.1\cdot 1)\cdot(-1) = -0.8$
$y_2 = (1 - 2\cdot 0.1\cdot 1.1)\cdot(-0.8) = -0.624$
$y_3 = (1 - 2\cdot 0.1\cdot 1.2)\cdot(-0.624) = -0.47424 \approx y(1.3)$

(b) $u'' + x\cdot u' - u = 5 + x, \quad u(-2) = 0.7, \quad u(0) = -0.2,$
$h = 0.5$ ger $x_0 = -2$, $x_1 = -1.5$, $x_2 = -1$, $x_3 = -0.5$, $x_4 = 0$.
Approximation av derivatan ger i punkten x_i: $\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + x_i\dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} - u_i = 5 + x_i$
som vi skriver om till $(\dfrac{1}{h^2} - \dfrac{x_i}{2h})u_{i-1} + (-\dfrac{2}{h^2} - 1)u_i + (\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{x_i}{2h})u_{i+1} = 5 + x_i$.
Med $i = 1, 2, 3$ erhålls

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 5.5 & -9 & 2.5 & & \\ & 5 & -9 & 3 & \\ & & 4.5 & -9 & 3.5 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 3.5 \\ 4 \\ 4.5 \\ -0.2 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} -9 & 2.5 & \\ 5 & -9 & 3 \\ & 4.5 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.35 \\ 4 \\ 5.2 \end{pmatrix}$$

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. (a) Newton-Raphson bör ha (minst) kvadratisk konvergens om det är en enkelrot, så $p = 2$ förväntas i $|x_{i+1}-x^*| = c|x_i-x^*|^p$. Beräkna p med $(*)$ $p = \ln(\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i})/\ln(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}})$ där $\varepsilon_i = |x_i-x^*|$, ELLER studera kvoten $c = \varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i^2$. Om c inte går mot en konstant, testa om $p = 1$ och studera kvoten $c = \varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i$ istället.

i	x_i	$\varepsilon_i = \|x_i - x^*\|$	$\varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i^2$	$c = \varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i$	p med $(*)$
0	x_0	$1.42.. \cdot 10^{-2}$	35	0.5	
1	x_1	$7.10.. \cdot 10^{-3}$	70	0.5	1
2	x_2	$3.55.. \cdot 10^{-3}$	140	0.5	1
3	x_3	$1.77.. \cdot 10^{-3}$			

Det verkar inte stämma att $p = 2$ medan om $p = 1$ är c en konstant ungefär 0.5 ELLER p beräknas till 1. Det verkar som vi har en dubbelrot här.

(b) $y' = xy^2$, $\quad y(0) = 1$, $\quad x_0 = 0$, $\quad x_1 = h$, $\quad y_0 = 1$, $\quad h = 0.3$, $\quad f(x, y) = xy^2$
trapetsmetoden: $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(x_0y_0^2 + x_1y_1^2)$ så $y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(h \cdot y_1^2) = 1 + 0.045y_1^2$
Sätt $y_1 = z$ och vi får att ekvationen $z = 1 + 0.045z^2$ ska lösas med metoden
$z_{i+1} = 1 + 0.045z_i^2 = \varphi(z_i)$. Lämpligt $z_0 = 1$ (ty $y(0) = 1$ bör ligga ganska nära.)
Studera $\varphi'(z) = 0.09z$. $\quad |\varphi'(1)| = 0.09 \ll 1$ vilket tyder på snabb konvergens.

7. (a) Förväntad aritmetisk komplexitet är $O(n^2)$ för undertriangulärt ekvationssystem. Studera kvoten $t(2n)/t(n) \approx 2^p$

n	$t(n)$	$t(2n)/t(n)$
1000	$1.81 \cdot 10^{-3}$	2.67
2000	$4.83 \cdot 10^{-3}$	3.6
4000	$1.74 \cdot 10^{-2}$	3.8
8000	$6.62 \cdot 10^{-2}$	

Kvoten går mot 4 så $p = 2$ stämmer.

(b) Det relativa felet i lösningen bör inte vara större än vad den teoretiska uppskattningen ger:
$$\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty \cdot \frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} = \kappa_\infty(A)\frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} \leq 12.23\frac{0.1}{2} \leq 0.6115$$
då $|\Delta x| = \begin{pmatrix} 0.1788 \\ 0.2644 \\ 0.2468 \\ 0.3836 \end{pmatrix}$ och $|\Delta b| = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{pmatrix}$. I praktiken blev det $\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \frac{0.3836}{2.0290} \leq 0.19$,
så förändringen är inte orimligt stor.

(c) På grund av det lilla pivotelementen kommer man att få en stor multiplikator vid Gausseliminationen. Det medför att matriselementen kan bli stora och därmed få stora avrundningsfel. Det kan dessutom bli stora avrundningsfel under beräkningen och förutsättningen för att erhålla en noggrann lösning är inte så god. (Matrisens konditionstal, $\kappa_\infty(A) = 2.5$, är litet och matrisen är därför inte känslig för störningar i högerledet, vilket inte har med beräkningarna under Gausseliminationen att göra.)

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Se exempelsamlingen 4.24b).

(b) $|\int_{x_0}^{x_1} f(x)\ dx - T(h)| \leq \int_{x_0}^{x_1} |\frac{f''(\eta)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)|\ dx \leq c\int_{x_0}^{x_1} |(x - x_0)(x - x_1)|\ dx \leq$
$c\int_{x_0}^{x_1} h \cdot h\ dx \leq ch^2[x]_{x_0}^{x_1} = ch^2 \cdot h$

(c) Se exempelsamlingen 9.15b).

(d) Euler bakåt på testekvationen $y' = \lambda y$ ($\lambda < 0$) blir $y_{i+1} = \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right) y_i$

Villkoret blir att $1 \leq |1 - h\lambda|$ krävs för stabilitet. Figuren nedan ger att villkoret är uppfyllt