Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $14^{00} - 18^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) **Relativa** felet i a är ≤ 0.0025. Hur många signifikanta siffror har $\bar{a} = 17.1023$? (1p)

   (b) Ett flyttal $x \approx 4.44 \cdot 10^{14}$ lagras på normaliserad form i ett flyttalssystem med basen 2 och $t = 52$. Ange en övre gräns för avrundningsfelet som uppstår. (1p)

   (c) Vad är det för skillnad mellan kvadratisk interpolation och approximation med ett andragradspolynom? (1p)

   (d) Differentialekvationen $y' = -10y$ ska lösas med Euler framåt. Förklara varför man måste välja $h < 0.2$. (Vad kallas begreppet?) (1p)

   (e) Ekvationerna $x^2 - 9 = 0$ och $\dfrac{x^2}{90} - 0.1 = 0$ har båda en enkelrot $x^* = 3$. I vilket fall är roten illa-konditionerad? Varför? (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt $z = \dfrac{x^2}{2}(y + \cos y)$, där $\bar{x} = 0.297$ och $\bar{y} = 0.56$ är korrekt avrundade.
   Beräkna z med felgräns då $\bar{z}$ avrundats till 5 decimaler. (Maximalfelsuppskattningen ska användas.) (1p)

3. (a) Låt

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1.2 & -2.8 & -1.8 \\ 0 & 3.52 & 6.44 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} 91 \\ -49 \\ 183.32 \end{pmatrix}$$

   LU-faktorisera A. Använd partiell pivotering. (1p)

   (b) Lös $Ax = b$ med hjälp av din LU-faktorisering. (1p)

4. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	430	440	450	460	470
$f(x)$	1.37	1.42	1.48	1.55	1.63

   (a) Uppskatta $f(444)$ med hjälp av linjär interpolation. (1p)

   (b) Uppskatta $f(444)$ med hjälp av det förstagradspolynom (på bra form) som approximerar alla punkterna i minsta kvadratmening. (1p)

   (c) Uppskatta $f(444)$ med hjälp av den kvadratiska spline på $[440,\ 460]$ som uppfyller villkoret $s'(440) = 0$. (1p)

   (d) Beräkna bästa möjliga approximation till $\displaystyle\int_{430}^{470} f(x)\,dx$ med trapetsregeln, samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

5. Betrakta $y' = -2xy, \quad y(1) = -1.$
   (a) Använd Heuns metod och $h = 0.25$ för att beräkna en approximation till $y(1.25)$. (1p)
   (b) Använd trapetsmetoden och $h = 0.25$ för att beräkna en approximation till $y(1.5)$. (1p)
   (c) Betrakta nu istället $u'' = -2xu, \quad u(0) = c_0, \quad u(1) = c_1$.
   Bandmatrismetoden med $h = 0.25$ ska användas för att beräkna en approximation till lösningen. Ange (på valfri form) det ekvationssystem som behöver lösas. Matrisen ska anges med siffervärden. (1p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. En funktion $f(x)$ interpoleras med en kubisk spline, med någon typ av ändpunktsvillkor, på intervallet $[0,\ 1]$. Följande trunkeringsfel uppskattas i några delintervall som alla har längden h:

h	$\lvert R_T(h)\rvert$ i första intervallet	$\lvert R_T(h)\rvert$ i centrala intervallet	$\lvert R_T(h)\rvert$ i sista intervallet
0.1	$8.33 \cdot 10^{-6}$	$9.06 \cdot 10^{-6}$	$5.20 \cdot 10^{-4}$
0.05	$5.21 \cdot 10^{-7}$	$5.21 \cdot 10^{-7}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$
0.025	$3.26 \cdot 10^{-8}$	$3.26 \cdot 10^{-8}$	$1.32 \cdot 10^{-4}$

   (a) Vilken noggrannhetsordning erhålls i de olika delintervallen? (1p)
   (b) Vilket h behövs för att det maximala trunkeringsfelet ska understiga 10^{-5}? (1p)

7. Ett program för Newton-Raphsons metod avbryter iterationerna då $\text{abs}(f(x)) < 10^{-7}$. Vid test av en ekvation med känd rot $x^* = \sqrt{2}$ fås resultaten:

i	x_i	$\lvert f(x_i)\rvert$	$\lvert x_i - x^*\rvert \leq$
0	1.000000000000000	0.005000000000000	0.4142135624
1	1.500000000000000	0.001250000000000	0.0857864377
2	1.416666666666667	0.000034722222222	0.0024531043
3	1.414215686274510	0.000000030036524	0.0000021239

   (a) Vilken konvergensordning förväntas? Stämmer den? (1p)
   (b) Förklara varför noggrannheten i x_3 är sämre än 10^{-7}. (1p)

8. Funktionsvärden för en funktion $f(x)$ har avrundats till 4 decimaler och $f'(x)$ ska approximeras med centraldifferensen

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}.$$

   Trunkeringsfelet kan uppskattas som $R_T(h) \approx 4h^2$. Vilket h bör väljas för att minimera det totala felet? (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

9. (a) Låt $S = t_0 + t_1 + \cdots + t_n$ med exakta termer t_i. Visa att beräkningsfelet från additionerna uppfyller $|\Delta S| \lesssim \mu(n|t_0| + n|t_1| + (n-1)|t_2| + (n-2)|t_3| + \cdots + |t_n|)$. (1p)
   (b) Visa att en tridiagonal $n \times n$-matris kan LU-uppdelas med $3n$ aritmetiska operationer om pivotering inte behöver göras. (1p)
   (c) Bestäm A, B och C samt avgör vilket p som gäller, då

$$\frac{1}{h^2}(A \cdot f(x) + B \cdot f(x+h) + C \cdot f(x+2h)) = f''(x) + O(h^p). \qquad \text{(1p)}$$

   (d) Visa att $\dfrac{||\Delta x||}{||x||} \leq \kappa(A) \dfrac{||\Delta b||}{||b||}$ för inducerade normer om $Ax = b$ och $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$. (1p)
   (e) Visa att $\dfrac{||\Delta x||}{||x||} \geq \dfrac{1}{\kappa(A)} \dfrac{||\Delta b||}{||b||}$ för inducerade normer om $Ax = b$ och $A(x+\Delta x) = b + \Delta b$. (1p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Svar till tentamen i TANA21/22 Beräkningsmatematik

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) $|\Delta a| \leq 0.0025 \cdot 17.1023 \leq 0.43 \cdot 10^{-1}$ ger 1 korrekt decimal och därmed 3 sign.siffror.

   (b) $\mu = 0.5 \cdot 2^{-52}$ och $|\Delta x| \leq \mu \cdot 4.44 \cdot 10^{14} \leq 0.05$

   (c) Vid kvadratisk interpolation bestäms ett andragradspolynom som går exakt genom 3 punkter. Vid approximation bestäms ett andragradspolynom som passar bra till flera än 3 punkter men (förmodligen) inte går genom någon av dem.

   (d) För att Euler framåt ska vara <u>stabil</u> krävs $h \leq \frac{-2}{\lambda}$. Här är $\lambda = -10$ vilket ger $h \leq 0.2$. En instabil lösning avlägsnar sig mer och mer (hoppar upp och ned) från den rätta lösningen som ska vara avtagande.

   (e) Sätt $f_1(x) = x^2 - 9$, $\quad f_2(x) = x^2/90 - 0.1$ och studera derivatan i $x^* = 3$
   $f_1'(x) = 2x, \quad f_1'(3) = 6, \quad f_2'(x) = x/45, \quad f_2'(3) = 1/15 = 0.0666...$
   I ekvationen $f_2(x) = 0$ är roten illa-konditionerad eftersom derivatans belopp är litet. Då blir roten mera störningskänslig.

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Sätt $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2}(y + \cos y)$; $\quad x = 0.297 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$; $\quad y = 0.56 \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$;

   $|\Delta f| \lesssim |x(y + \cos y)\Delta x| + |\dfrac{x^2}{2}(1 - \sin y)\Delta y| \leq 3.13 \cdot 10^{-4}$

   $\bar{z} = 0.06207$ ger $|R_B| \leq 0.5 \cdot 10^{-5}$ (eller $0.38 \cdot 10^{-5}$) och

   $|\Delta z| \leq 3.13 \cdot 10^{-4} + 0.5 \cdot 10^{-5} \leq 3.2 \cdot 10^{-4}$ (i båda fallen) <u>Svar</u>: $z = 0.06207 \pm 3.2 \cdot 10^{-4}$

3. (a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -1.2 & -2.8 & -1.8 \\ 0 & 3.52 & 6.44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0.4 & -4.4 & -1.8 \\ 0 & 3.52 & 6.44 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0.4 & -4.4 & -1.8 \\ 0 & -0.8 & 5 \end{pmatrix}$

   <u>Svar</u>: $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.4 & 1 & \\ 0 & -0.8 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ & -4.4 & -1.8 \\ & & 5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $Ly = Pb \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 91 & -85.4 & 115 \end{pmatrix}^T, \qquad Ux = y \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -17 & 10 & 23 \end{pmatrix}^T$

4. (a) T.ex. enligt Lagrange:
   $p(x) = 1.42\dfrac{(x - 450)}{(440 - 450)} + 1.48\dfrac{(x - 440)}{(450 - 440)}; \qquad p(444) = 1.444$
   eller Newton: $p(x) = 1.42 + 0.006 \cdot (x - 440)$

   (b) Ansats på bra form: $p(x) = c_0 + c_1(x - 450)$. Alla data i ansatsen ger
   $\begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 1 & -10 \\ 1 & 0 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.37 \\ 1.42 \\ 1.48 \\ 1.55 \\ 1.63 \end{pmatrix}$ Normalekvationerna blir $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7.45 \\ 6.5 \end{pmatrix}$ ger
   $c_0 = 1.49$, $c_1 = 0.0065$ och $p(x) = 1.49 + 0.0065(x - 450)$ så $p(444) = 1.451$

   (c) $\begin{cases} s_1(x) = a_1 + b_1\left(\frac{x-440}{10}\right) + c_1\left(\frac{x-440}{10}\right)^2, & 440 \leq x \leq 450 \\ s_2(x) = a_2 + b_2\left(\frac{x-450}{10}\right) + c_2\left(\frac{x-450}{10}\right)^2, & 450 \leq x \leq 460 \end{cases}$ (s_2 behövs inte då $s_1(444)$ söks.)

   $s_1'(x) = \dfrac{b_1}{10} + \dfrac{2c_1}{10}\left(\dfrac{x - 440}{10}\right)$

   $s_1'(440) = \dfrac{b_1}{10} = 0$ ger $b_1 = 0$; $s_1(440) = a_1 = 1.42$; $s_1(450) = a_1 + b_1 + c_1 = 1.48$ ger $c_1 = 0.06$

   $s_1(444) = 1.42 + 0.06\left(\dfrac{444 - 450}{10}\right)^2 = 1.4296$

(d) $T(h) = h(f_0/2 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4/2)$
$T(10) = 10(1.37/2 + 1.42 + 1.48 + 1.55 + 1.63/2) = 59.5$
$|\Delta T| \lesssim h(|\Delta f_0|/2 + |\Delta f_1| + |\Delta f_2| + |\Delta f_3| + |\Delta f_4|/2) \leq 10(4 \cdot 0.005) = 0.2$

5. $y' = -2xy, \quad y(1) = -1, \quad x_0 = 1, \quad y_0 = -1, \quad h = 0.25, \quad f(x,y) = -2xy$

(a) $k_1 = f(x_0, y_0) = 2, \qquad k_2 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1) = f(1.25, -0.5) = 1.25,$
$y_1 = -1 + \frac{0.25}{2}(2 + 1.25) = -0.59375 \approx y(1.25)$

(b) $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(-2x_iy_i - 2x_{i+1}y_{i+1})$ ger $y_{i+1} = \dfrac{1 - hx_i}{1 + hx_{i+1}} y_i$ så

$$y_1 = \frac{1 - 0.25 \cdot 1}{1 + 0.25 \cdot 1.25}(-1) = -0.5714...$$

$$y_1 = \frac{1 - 0.25 \cdot 1.25}{1 + 0.25 \cdot 1.5}(-0.5714...) = -0.2857... \approx y(1.5)$$

(c) $u'' = 2xu, \quad u(0) = c_0, \quad u(1) = c_1,$
$h = 0.25$ ger $x_0 = 0$, $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 0.75$, $x_4 = 1$.
Approximation av derivatan ger i punkten x_i: $\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + 2x_i \cdot u_i = 0$ som vi skriver om till $\dfrac{1}{h^2}u_{i-1} + (2x_i - \dfrac{2}{h^2})u_i + \dfrac{1}{h^2}u_{i+1} = 0$. Med $i = 1, 2, 3$ erhålls

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 16 & -31.5 & 16 & & \\ & 16 & -31 & 16 & \\ & & 16 & -30.5 & 16 \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_1 \end{pmatrix} \text{ eller } \begin{pmatrix} -31.5 & 16 & \\ 16 & -31 & 16 \\ & 16 & -30.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16c_0 \\ 0 \\ -16c_1 \end{pmatrix}$$

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. (a) Studera felkvoten $|R_T(2h)|/|R_T(h)| \approx 2^p$

h	$\lvert R_T(2h)\rvert/\lvert R_T(h)\rvert$ i första intervallet	$\lvert R_T(2h)\rvert/\lvert R_T(h)\rvert$ i centrala intervallet	$\lvert R_T(2h)\rvert/\lvert R_T(h)\rvert$ i sista intervallet
0.05	15.98	17.39	1.97
0.025	15.98	15.98	2
$p =$	4	4	1

(b) Sista intervallet: $c \cdot h \approx 1.32 \cdot 10^{-4}$ ger $c \approx 5.28 \cdot 10^{-3}$; $ch = 10^{-5}$ ger då $h \approx 1.89 \cdot 10^{-3}$.

7. (a) Newton-Raphson bör ha (minst) kvadratisk konvergens om det är en enkelrot, så $p = 2$ förväntas i $|x_{i+1} - x^*| = c|x_i - x^*|^p$. Studera kvoten $c = \varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i^2$ ELLER beräkna p med
$(*)$ $p = \ln(\dfrac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_i})/\ln(\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_{i-1}})$ där $\varepsilon_i = |x_i - x^*|$

i	x_i	$\varepsilon_i = \lvert x_i - x^*\rvert$	$c = \varepsilon_{i+1}/\varepsilon_i^2$	p med $(*)$
0	1.000000000000000	0.4142135624	0.5	
1	1.500000000000000	0.0857864377	0.333..	2.26..
2	1.416666666666667	0.0024531043	0.352..	1.98..
3	1.414215686274510	0.0000021239		

Det verkar stämma att $p = 2$ ty c går mot en konstant ungefär 0.35 ELLER p beräknas till 2.

(b) Att $|f(x_3)| < 10^{-7}$ betyder inte att roten har ett fel $< 10^{-7}$. Felet i roten uppskattas med $|x_3 - x^*| \lesssim \dfrac{|f(x_3)|}{|f'(x_3)|}$.

8. Sätt $D = \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$.
Fel från avrundade $f(x)$-värden, $|\Delta f_i| \leq \varepsilon$, ger med maximalfelsuppskattning
$|\Delta D| \leq \dfrac{\varepsilon}{2h} + \dfrac{\varepsilon}{2h} = \dfrac{\varepsilon}{h}$ där $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-4}$.
Totala felet blir $|R_{TOT}| = \dfrac{\varepsilon}{h} + 4h^2$ som minimeras då $-\dfrac{\varepsilon}{h^2} + 8h = 0$ vilket ger $h^3 = \dfrac{\varepsilon}{8}$ så $h \approx 1.84 \cdot 10^{-2}$.

Del D: Härleda teoretiska samband

9. (a) $S = \underbrace{\underbrace{\underbrace{t_0 + t_1}_{s_1} + t_2}_{s_2} + \cdots + t_n}_{s_n}$ Det gäller $\dfrac{|\Delta s_i|}{|s_i|} \leq \mu$; Maximalfelsuppskattning ger

$$|\Delta S| \lesssim \left|\frac{\partial S}{\partial s_1}\Delta s_1\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial s_2}\Delta s_2\right| + \cdots + \left|\frac{\partial S}{\partial s_n}\Delta s_n\right| = |\Delta s_1| + |\Delta s_2| + \cdots + |\Delta s_n| \leq$$
$$\mu(|t_0 + t_1| + |t_0 + t_1 + t_2| + \cdots + |t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n|) \leq$$
$$\mu(|t_0| + |t_1| + |t_0| + |t_1| + |t_2| + \cdots + |t_0| + |t_1| + |t_2| + \cdots + |t_n|) \leq$$
$$\mu(n|t_0| + n|t_1| + (n-1)|t_2| + (n-2)|t_3| + \cdots + 2|t_{n-1}| + |t_n|)$$

(b) Tridiagonal matris: (x är element skilt från 0)

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 \\ 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ m & x' & x & 0 \\ & x & x & x \\ & 0 & x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ m & x' & x & 0 \\ & m & x' & x \\ & & x & x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x & x & 0 & 0 \\ m & x' & x & 0 \\ & m & x' & x \\ & & m & x' \end{pmatrix}$$

I varje steg behöver vi beräkna $m = \dfrac{x}{x}$ (1 a.o.) och $x' = x - m * x$ (2 a.o.).

Detta upprepas i $n-1$ steg. Totalt behövs $3(n-1) \approx 3n$ a.o.

(c) Taylorutveckling ger $\dfrac{1}{h^2}\Big[A \cdot f(x) + B \cdot f(x+h) + C \cdot f(x+2h)\Big] =$

$$\frac{1}{h^2}\Big[A \cdot f(x) + B \cdot \Big(f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\Big) + C \cdot \Big(f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2!}f''(x) +$$
$$\frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\Big)\Big] = \frac{1}{h^2}\Big[f(x) \cdot (A + B + C) + hf'(x) \cdot (B + 2C) + h^2 \cdot f''(x) \cdot (B/2 + 2C) +$$
$$h^3 \cdot f'''(x) \cdot (B/6 + 8C/6) + \ldots\Big] = f''(x) + O(h^p)$$

Villkor: $A + B + C = 0$, $B + 2C = 0$, $B/2 + 2C = 1$ ger $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$

$B/6 + 8C/6 = 1$ så $R_T = \dfrac{1}{h^2}(h^3 \cdot f'''(x) + \ldots) = O(h)$

Svar: $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$. Noggrannhetsordningen är $p = 1$.

(d) $Ax = b$ och $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$ ger $A\Delta x = \Delta b$. Vi har 4 samband:

(1) $Ax = b$, så $||b|| \leq ||A|| \cdot ||x||$
(2) $A\Delta x = \Delta b$ så $||\Delta b|| \leq ||A|| \cdot ||\Delta x||$
(3) $\Delta x = A^{-1}\Delta b$ så $||\Delta x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b||$
(4) $x = A^{-1}b$ så $||x|| \leq ||A^{-1}|| \cdot ||b||$

Eftersom alla $||\cdot|| \geq 0$ kan vi multiplicera (1) och (3):

$||b|| \cdot ||\Delta x|| \leq ||A|| \cdot ||x|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||\Delta b||$ och stuva om till $\dfrac{||\Delta x||}{||x||} \leq \underbrace{||A|| \cdot ||A^{-1}||}_{\kappa(A)} \dfrac{||\Delta b||}{||b||}$

(e) Utnyttja sambanden i (d) och multiplicera (2) och (4):

$||x|| \cdot ||\Delta b|| \leq ||A|| \cdot ||\Delta x|| \cdot ||A^{-1}|| \cdot ||b||$ vilket ger $\dfrac{||\Delta x||}{||x||} \geq \dfrac{1}{\underbrace{||A|| \cdot ||A^{-1}||}_{\kappa(A)}} \dfrac{||\Delta b||}{||b||}$