Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2017-08-21

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $14^{00} - 18^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Skriv talet 0.00170821 på normaliserad form i ett flyttalssystem med bas 10, 2 decimaler och exponent mellan -9 och 9. (1p)

   (b) Låt $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ och bestäm den av normerna $||x||_\infty$, $||x||_1$ eller $||x||_2$ som ger minst värde. (1p)

   (c) Ett ekvationssystem $Ax = b$ kan lösas antingen genom en LU-uppdelning av A följt av framåt- och bakåtsubstitution, eller genom beräkning av A^{-1} och multiplikation $A^{-1}b$. Förklara, genom att ange antalet operationer för de båda fallen, varför den första varianten är att föredra. (1p)

   (d) Förklara vad som menas med naturliga splines. (Vilket gradtal gäller? Vilka villkor gäller?) (1p)

   (e) Vilka fixpunkter har $g(x) = 2x^2 - x$? (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. För att beräkna $f = (\sqrt{26} - 5)^3$ kan även uttrycket $g = \dfrac{1}{(\sqrt{26} + 5)^3}$ användas.
   Antag $\sqrt{26} = 5.09902 \pm 0.5 \cdot 10^{-5}$. Ta fram ett uttryck för det relativa felet i g och beräkna sedan dess värde. (1p)

3. (a) Låt
   $$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -1.2 & 2.8 & -1.8 \\ 1.8 & 3.6 & -8.4 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} 1.8 \\ 3.54 \\ 5.52 \end{pmatrix}$$
   LU-faktorisera A. Använd partiell pivotering. (2p)

   (b) Lös $Ax = b$ med hjälp av din LU-faktorisering. (1p)

4. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
$f(x)$	1.428	1.753	2.164	2.658	3.232

   (a) Uppskatta $f(2.56)$ med hjälp av kvadratisk interpolation. (1p)

   (b) Bestäm den konstant $p(x) = c$ som bäst approximerar punkterna i minsta kvadratmening. (1p)

   (c) Uppskatta $f''(2.5)$ samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

5. Betrakta
   $$y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$
   Använd Euler framåt och $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(0.3)$. (2p)

6. Ekvationen $x = 1 + 0.09x^2$ har en rot $x^* \approx 1$. Använd en numerisk metod för att beräkna en approximation till roten med fel mindre än 10^{-6}. (Ska visas med metodoberoende feluppskattning.) (1p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

7. En viss integral har beräknats med ett program för trapetsregeln för olika steglängder h. Beräknade värden, $T(h)$, visas i tabellen nedan.

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$T(h)$	0.71253023	0.70832679	0.70808890	0.70807438

   (a) Vilken noggrannhetsordning är förväntad och stämmer den? (1p)

   (b) Under vilken förutsättning skulle det löna sig att använda Simpsons metod istället för trapetsregeln? (1p)

8. Matlab-funktionen `polyfit` har testats på några olika sätt.

   (a) Följande tabell visar den tid t i sekunder det tar på en viss dator att beräkna ett interpolationspolynom p av grad n med `polyfit`.

n	512	1024	2048	4096	8192
t	0.0875	0.299	1.79	12.3	110

   Vilken aritmetisk komplexitet verkar `polyfit` ha? (1p)

   (b) Det är sällan lyckat att interpolera polynom av så hög grad som i tabellen ovan. Varför? (1p)

9. Se uppgift 2a): För att beräkna $f = (\sqrt{26} - 5)^3$ kan även uttrycket $g = \dfrac{1}{(\sqrt{26} + 5)^3}$ användas. Vilket av uttrycken får det minsta relativa felet? Motivera varför! (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

10. (a) För att beräkna en approximation till $\int_a^b f(x)\, dx$ ska Simpsons formel användas. Dela intervallet i 6 delintervall och visa att $|\Delta S(h)| \le (b - a)\varepsilon$ om $|\Delta f_i| \le \varepsilon$. (1p)

   (b) Visa att den aritmetiska komplexiteten för Simpsons formel är linjär. (1p)

   (c) Låt
$$D = \frac{f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)}{h^2}.$$
   Vilken derivata approximeras med differenskvoten och vilken noggrannhetsordning har den? (1p)

   (d) Härled stabilitetsvillkoret för Euler bakåt. (1p)

   (e) Låt A vara en $n \times n$-matris och b en kolumnvektor av längd n. Ett system av differentialekvationer, där $z = z(x)$, kan då skrivas på matrisform $z' = Az + b$.
   Visa hur $z' = Az + b$ löses med Euler bakåt. Vad behöver utföras i varje steg? (1p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TANA22
2017-08-21

Svar till tentamen i TANA21/22 Beräkningsmatematik

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) $1.71 \cdot 10^{-3}$

   (b) $||x||_\infty = 3$, $||x||_1 = 6$, $||x||_2 = \sqrt{14} \approx 3.74$. Minst är $||x||_\infty = 3$.

   (c) LU, fram och bak kräver $n^3/3 + n^2 + n^2$ a.o. Inversen kräver $2n^3$ a.o. och matris-vektor-multiplikation $2n^2$ a.o. Eftersom inversen är dyrare än LU-uppdelning är det första alternativet bäst. Dessutom är den algoritmen mindre störningskänslig.

   (d) Naturliga splines är kubiska splines på $[a,\ b]$ med $s''(a) = 0$ och $s''(b) = 0$. Kubiska splines är styckvisa tredjegradpolynom. (En kubisk spline med naturliga ändpunktsvillkor går som en böjlig linjal genom de givna punkterna utan böjning i första och sista noden.)

   (e) $x = 2x^2 - x$, ger $x(x-1) = 0$ så fixpunkterna är $x = 0$ och $x = 1$.

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Sätt $g = \dfrac{1}{(a+5)^3}$; $\quad a = 5.09902 \pm 0.5 \cdot 10^{-5} \quad |\Delta g| \lesssim |\dfrac{-3}{(a+5)^4}\Delta a|$,

   relativt fel: $|\dfrac{\Delta g}{g}| \lesssim \dfrac{3|(a+5)^3 \cdot \Delta a|}{(a+5)^4} = \dfrac{3|\Delta a|}{|a+5|} \leq 1.49 \cdot 10^{-6}$

3. (a) $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -1.2 & 2.8 & -1.8 \\ 1.8 & 3.6 & -8.4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ 0.4 & 1.2 & 0.6 \\ -0.6 & 6 & -12 \end{pmatrix}$ byt 2 och 3 : $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -0.6 & 6 & -12 \\ 0.4 & 1.2 & 0.6 \end{pmatrix} \sim$
   $\begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ -0.6 & 6 & -12 \\ 0.4 & 0.2 & 3 \end{pmatrix}$

   Svar: $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.6 & 1 & \\ 0.4 & 0.2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -6 \\ & 6 & -12 \\ & & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $Ly = Pb \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 1.8 & 6.6 & 1.5 \end{pmatrix}^T, \qquad Ux = y \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.1 & 0.5 \end{pmatrix}^T$

4. (a) T.ex. enligt Lagrange:
   $p(x) = 2.164\dfrac{(x-2.6)(x-2.7)}{(2.5-2.6)(2.5-2.7)} + 2.658\dfrac{(x-2.5)(x-2.7)}{(2.6-2.5)(2.6-2.6)} + 3.232\dfrac{(x-2.5)(x-2.6)}{(2.7-2.5)(2.7-2.6)}$
   $p(2.56) = 2.4508$
   eller Newton: $p(x) = 2.164 + 4.94 \cdot (x-2.5) + 4 \cdot (x-2.5)(x-2.6)$
   Det går också att använda $x = 2.4, x = 2.5$ och $x = 2.6$ vilket ger $p(2.56) = 2.45044$.

   (b) Ansats $p(x) = c$ $\qquad$ Normalekvationerna blir $5c = 11.235$ och $p(x) = 2.247$

   (c) $f''(2.5) \approx \dfrac{1.753 - 2 \cdot 2.164 + 2.658}{2 \cdot 0.1^2} = 8.3$
   $z = \dfrac{f_0 - 2 \cdot f_1 + f_2}{h^2}, \quad |\Delta z| \lesssim \dfrac{1}{h^2}(|\Delta f_0| + 2|\Delta f_1| + |\Delta f_2|) \leq \dfrac{4 \cdot 0.0005}{0.1^2} = 0.2$

5. Skriv om till system: Sätt t.ex. $\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases}$ ger $\begin{cases} u' = v, & u(0) = 1, \\ v' = u - xv, & v(0) = 0. \end{cases}$

   Euler framåt ger
   $u_{i+1} = u_i + hv_i$
   $v_{i+1} = v_i + h(u_i - x_i \cdot v_i)$
   $u_1 = 1, \quad u_2 = 1.01, \quad u_3 = 1.0299 \approx y(0.3)$

6. Newton-Raphsons metod $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

   med $f(x) = 0.09x^2 - x + 1$, $f'(x) = 0.18x - 1$ och $x_0 = 1$ erhålls

$x_1 = 1.109756\ldots \qquad x_2 = 1.11111090\ldots$

Med $\bar{x} = 1.111111$ ger metodoberoende feluppskattning

$|\bar{x} - x^*| = \dfrac{|f(\bar{x})|}{|f'(\xi)|} \approx \dfrac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} \leq 1.2 \cdot 10^{-7}$ så $\bar{x}$ är tillräckligt noggrann.

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

7. (a) Ansätt $T(h) \approx c_0 + c_p h^p$. Formeln

$$\frac{T(4h) - T(2h)}{T(2h) - T(h)} \approx \frac{c_0 + c_p 4^p h^p - (c_0 + c_p 2^p h^p)}{c_0 + c_p 2^p h^p - (c_0 + c_p h^p)} = \frac{2^p(2^p - 1)}{(2^p - 1)} = 2^p$$

ger 17.67 för $h = 0.0125$ och 16.38 för $h = 0.00625$, vilket tyder på noggrannhetsordning är $p = 4$ medan det förväntade är $p = 2$.

(b) Högre ordningens metoder, som Simpsons metod, ger högre ordningens noggrannhet bara om integranden f är tillräckligt många gånger deriverbar. För en integrand som inte är så snäll finns det därmed ingen poäng med att använda en mer avancerad och därmed mer tidskrävande metod.

8. (a) Ansätt $t(n) \approx cn^p$ och studera kvoterna $\dfrac{t(2n)}{t(n)} \approx \dfrac{c(2n)^p}{cn^p} = 2^p$.

$\dfrac{0.299}{0.0875} = 3.4..,\quad \dfrac{1.79}{0.299} = 5.98..,\quad \dfrac{12.3}{1.79} = 6.87..\quad \dfrac{110}{12.3} = 8.94..$

Kvoten verkar gå mot 8 vilket tyder på $p = 3$. Det verkar också rimligt eftersom ett linjärt ekvationssystem behöver lösas.

(b) Runges fenomen kan uppträda vid interpolation med polynom av hög grad och yttrar sig i så fall i form av stora oscillationer mellan interpolationspunkterna, typiskt i närheten av ändarna på intervallet.

9. Då $\sqrt{26} \approx 5.099$ beräknas i ett flyttalssystem kommer värdet att avrundas. Kancellation uppstår vid subtraktionen med 5 i uttrycket för f. Uttrycket g är kancellationsfritt och kommer att ge ett mindre relativt fel än f.

Del D: Härleda teoretiska samband

10. (a) $S(h) = \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + f_6), \qquad h = (b - a)/6.$ och $|\Delta f_i| \leq \varepsilon$.

$|\Delta S(h)| \leq \dfrac{h}{3}(|\Delta f_0| + 4|\Delta f_1| + 2|\Delta f_2| + 4|\Delta f_3| + 2|\Delta f_4| + 4|\Delta f_5| + |\Delta f_6|) \leq \dfrac{h}{3}18\varepsilon = \dfrac{b-a}{6} \cdot 6\varepsilon = (b - a)\varepsilon$

(b) Se a). Låt $n = 6$. För att beräkna $S(h)$ krävs $n - 1$ multiplikationer med 4 eller 2, n additioner, 1 multiplikation med h och 1 division med 3, så totalt $2n + 1$ aritmetiska operationer. Den aritmetiska komplexiteten är därför linjär.

(c) Taylorutveckling ger $D = \dfrac{1}{h^2}\Big[f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)\Big] =$

$\dfrac{1}{h^2}\Big[f(x) - 2\Big(f(x) - hf'(x) + \dfrac{h^2}{2!}f''(x) - \dfrac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\Big) + f(x) - 2hf'(x) + \dfrac{4h^2}{2!}f''(x) - \dfrac{8h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\Big] =$

$\dfrac{1}{h^2}\Big[f(x)\cdot(1-2+1) + hf'(x)\cdot(2-2) + \dfrac{h^2}{2}f''(x)\cdot(-2+4) + \dfrac{h^3}{3!}f'''(x)\cdot(2-8) + \dfrac{h^4}{4!}f^{(iv)}(x)\cdot(-2+16) + \ldots\Big] = f''(x) - h\cdot f'''(x) + \dfrac{14h^2}{24}\cdot f^{(iv)}(x) + \ldots = f''(x) + ch^1 + O(h^2)$

där $c = -f'''(x)$. Noggrannhetsordningen är 1.

(d) Se exempelsamlingen 9.16 b.

(e) Euler bakåt: $z_{i+1} = z_i + h(Az_{i+1} + b)$ ger $(I - hA)z_{i+1} = z_i + hb$ där $(I - hA)$ är en matris och $z_i + hb$ en uträknad vektor. I varje steg måste ett ekvationssystem lösas. Då A är oberoende av x kan $(I - hA)$ LU-uppdelas och i varje steg i Euler-metoden behövs då en framåt- och en bakåt-substitution för effektivare lösning.