Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2017-01-04

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $8^{00} - 12^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Vad menas med signifikanta siffror? (1p)

   (b) Gör en omskrivning av $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ som undviker kancellation då $|x| \approx 0$. (1p)

   (c) Vad är matrisens konditionstal ett mått på? (1p)

   (d) Förklara Runges fenomen. (1p)

   (e) Vad är det för skillnad på lokalt och globalt trunkeringsfel? (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt

$$f = \frac{\sin x}{1+\cos x} \text{ och } |x| \ll 1.$$

   Gör en beräkningsfelsanalys då vi antar att varje beräkning utförs med ett relativt fel $\leq \mu$. Ange det <u>relativa</u> beräkningsfelet uttryckt i x och μ. (2p)

3. Vi känner LU-faktoriseringen av en matris A:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.25 & -0.8 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2.5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Använd LU-faktoriseringen för att lösa ekvationssystemet $Ax = b$ då $b = (5, -3, -10)^T$. (1p)

   (b) Antag att $||\Delta b||_\infty \leq 0.03$. Uppskatta $||\Delta x||_\infty$ då vi vet att $||A||_\infty = 18$ och

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.44 & -0.20 & -0.02 \\ -0.20 & 0 & 0.10 \\ 0.32 & 0.40 & -0.06 \end{pmatrix}.$$ (1p)

4. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	1.3	1.4	1.5
$f(x)$	0.93	0.97	0.99

   (a) Uppskatta $f(1.46)$ med hjälp av kvadratisk interpolation med Lagrange metod. (1p)

   (b) Avgör om

$$s(x) = \begin{cases} 0.93 + 0.45(x-1.3) - 5(x-1.3)^3, & 1.3 \leq x \leq 1.4 \\ 0.97 + 0.30(x-1.4) - 1.5(x-1.4)^2 + 5(x-1.4)^3, & 1.4 \leq x \leq 1.5 \end{cases}$$

   är en naturlig kubisk spline som interpolerar punkterna i tabellen.

   (1p)

   (c) Uppskatta $f'(1.4)$ samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

5. Betrakta

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

(a) Använd Heuns metod och $h = 0.15$ för att beräkna en approximation till $y(0.3)$. (1p)

(b) För att beräkna en approximation till $y(0.3)$ med Euler bakåt och $h = 0.3$ behöver vi lösa ekvationen

$$y_1 = y_0 + h \cdot x_1 \cdot y_1^2$$

Gör 3 iterationer med fixpunktsiteration (ej Newton-Raphson) för att beräkna en approximation till y_1. (1p)

(c) Beräkna en approximation till $u(0)$ med Euler framåt och $h = 0.5$ då

$$z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ x-2 \end{pmatrix}, \qquad z(-1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{och } z = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \qquad (1p)$$

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. En viss integral har beräknats på dator med Simpsons formel på intervallet $[\,0,\ 1\,]$. För olika antal delintervall, n, har beloppet av trunkeringsfelen uppskattats enligt tabellen nedan.

n	40	80	160	4000	8000	16000
$\lvert R_T \rvert$	$7.81 \cdot 10^{-7}$	$4.88 \cdot 10^{-8}$	$3.05 \cdot 10^{-9}$	$8.44 \cdot 10^{-15}$	$1.11 \cdot 10^{-15}$	$7.88 \cdot 10^{-15}$

Den tid, t, i sekunder det tog att göra beräkningarna visas i följande tabell.

n	40 000	80 000	160 000
t	0.032	0.061	0.122

(a) Är noggrannhetsordningen som förväntad? (1p)

(b) Verkar den aritmetiska komplexiteten vara som förväntad? (1p)

(c) Varför går de större värdena på n inte att använda för att avgöra noggrannhetsordningen? (1p)

7. (a) Vi vill med minsta kvadratmetoden beräkna det andragradspolynom som bäst approximerar punkterna i tabellen:

x	97	99	101	103
$f(x)$	2.2	1.8	1.7	1.8

Varför är ansatsen $p_2(x) = c_1 + c_2(x - 100) + c_3(x - 100)^2$ att föredra framför $p(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2$? (1p)

(b) När är Lagrange metod att föredra framför Newtons metod vid interpolation? (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Visa att triangulära ekvationssystem med n obekanta kan lösas med n^2 aritmetiska operationer. (1p)

(b) Härled stabilitetsvillkoret för Euler framåt. (1p)

(c) Låt A vara en $n \times n$-matris och b en kolumnvektor av längd n. Ett system av differentialekvationer, där $z = z(x)$, kan då skrivas på matrisform $z' = Az + b$.
Visa hur $z' = Az + b$ löses med trapetsmetoden. Vad behöver utföras i varje steg? (1p)

(d) Härled konvergensordningen för Newton-Raphsons metod vid lösning av $x^2 = 0$. (1p)

(e) Visa att D_+D_- är en andra ordningens (dvs $\lvert R_T \rvert \approx ch^2$) approximation av en andraderivata. Ange c. (1p)

Svar TANA21/22, 2017-01-04

1 a) I ett närmevärde med t $(t>0)$ korrekta decimaler sägs alla siffror i positioner med enhet större än eller lika med 10^{-t} vara signifikanta siffror, förutom inledande nollor som inte ska räknas med.

b) $$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)\sin x} = \frac{\sin^2 x}{(1+\cos x)\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

eller

$$\frac{1}{\sin x}\left(1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots\right)\right) = \frac{1}{\sin x}\left(\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\dots\right)$$

c) Konditionstalet är ett mått på hur känsligt $Ax=b$ är för störningar i b.

d) Om ett antal punkter interpoleras med ett polynom av högt gradtal finns risk för att polynomet har kraftiga svängningar, speciellt vid kanterna.

e) Vid lösning av ODE finns ett lokalt trunkeringsfel efter ett steg med metoden. Efter flera steg är felet globalt.

2. $$f = \underbrace{\frac{\overbrace{\sin x}^{c}}{\underbrace{1+\underbrace{\cos x}_{a}}_{b}}}_{d} \qquad f = \frac{c}{1+a} = \frac{c}{b} = d \approx \frac{x}{2}$$

$$|\Delta f| \lesssim \left|\frac{-c}{(1+a)^2}\mu\cdot a\right| + \left|\underbrace{\frac{-c}{b^2}}_{d}\cdot\mu b\right| + \left|\underbrace{\frac{1}{b}\mu c}_{\mu d}\right| + |\mu d| \approx$$

$$\mu\left(\frac{|x|}{4}\cdot 1 + 3\,\frac{|x|}{2}\right) = 1.75\mu|x|$$

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} \lesssim \frac{1.75\mu|x|}{|x|/2} = 3.5\mu$$

3.a) Lös $Ly = P \cdot b$

$Ux = y$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & -10 \\ 0,5 & 1 & & 5 \\ -0,25 & -0,8 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$y_1 = -10$

$y_2 = 5 - 0,5(-10) = 10$

$y_3 = -3 + 0,25(-10) + 0,8 \cdot 10 =$

$= 2,5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 12 & 2 & -10 \\ & -5 & 0 & 10 \\ & & 2,5 & 2,5 \end{array}\right)$$

$x_3 = 1$

$x_2 = -2$

$x_1 = \frac{1}{4}(-10 - 2 \cdot 1 - 12 \cdot (-2)) = 3$

$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b)

$$\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 18 \cdot 0,78 \frac{0,03}{10} = 0.04212$$

$$\|\Delta x\|_\infty \leq 0.04212 \cdot 3 \leq 0.127$$

4a) $P_2(x) = 0,93 \frac{(x-1,4)(x-1,5)}{(1,3-1,4)(1,3-1,5)} + 0,97 \frac{(x-1,3)(x-1,5)}{(1,4-1,3)(1,4-1,5)} + 0,99 \frac{(x-1,3)(x-1,4)}{(1,5-1,3)(1,5-1,4)}$

$P_2(1.46) = -0.1116 + 0.6208 + 0.4752 = 0,9844$

b) $S_1(1,3) = 0,93 \quad S_1(1,4) = 0,97 \quad S_2(1,4) = 0,97 \quad S_2(1,5) = 0,99$

$$S'(x) = \begin{cases} 0,45 - 15(x-1,3)^2 \\ 0,30 - 3(x-1,4) + 15(x-1,4)^2 \end{cases} \qquad S'(1,4) = \begin{cases} 0,30 \\ 0,30 \end{cases}$$

$$S''(x) = \begin{cases} -30(x-1,3) \\ -3 + 30(x-1,4) \end{cases} \qquad S''(1,4) = \begin{cases} -3 \\ -3 \end{cases}$$

OK

Kubisk spline

$S''(1,3) = 0$

$S''(1.5) = 0$

ja, också naturlig

c) $f'(1,4) \approx D_0 f(1,4) = \frac{f(1,5) - f(1,3)}{0,2} = 0,3$

$z = \frac{a-b}{2h}$

$$|\Delta z| \leq \left|\frac{1}{2h} \Delta a\right| + \left|\frac{-1}{2h} \cdot \Delta b\right| \leq \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 0,1} = 0.05$$

5. $y' = x \cdot y^2$, $y(0) = 1$ $\qquad f(x,y) = x \cdot y^2$, $h = 0.15$

a) $k_1 = f(x_0, y_0) = f(0,1) = 0$

$k_2 = f(x_0+h,\ y_0 + h \cdot k_1) = f(0.15, 1) = 0.15$

$y_1 = 1 + \frac{0.15}{2}(0 + 0.15) = 1.01125$ $\qquad x_1 = 0.15$

$k_1 = f(0.15,\ 1.01125) = 0.15339\ldots$

$k_2 = f(0,30,\ 1.0342\ldots) = 0,32090\ldots$

$y_2 = 1.01125 + \frac{0.15}{2}(0.15339\ldots + 0.32090\ldots) \approx 1,046823$

b) kalla roten för z^*

ekvation: $z = 1 + 0,3 \cdot 0,3 \cdot z^2$

fixpunktsiteration $\quad z_{i+1} = 1 + 0.09\, z_i^2$, $\quad z_0 = 1$

$z_1 = 1.09$

$z_2 = 1.106929$

$z_3 = 1.110276\ldots$

c) $z_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + 0.5\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}0\\-1,5\end{pmatrix}$

$z_2 = \begin{pmatrix}0\\-1,5\end{pmatrix} + 0,5\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\-2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1,5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-2,5\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-0,75\\-0,5\end{pmatrix}$

$u(0) \approx -0,75$

6. Simpson har noggrannhetsordning 4 och linjär aritm. komplexitet

a)

h	$\lvert R_T(h)\rvert$	$\lvert R_T(2h)\rvert / \lvert R_T(h)\rvert$
1/40	$7.81 \cdot 10^{-7}$	
1/80	$4,88 \cdot 10^{-8}$	16.00…
1/160	$3.05 \cdot 10^{-9}$	16,0…

$2^P \approx 16 \Rightarrow p = 4$

stämmer

b)

n	$t(n)$	$t(2n)/t(n)$
40 000	0,032	1,9…
80 000	0.061	2,0
160 000	0,122	

$2^P = 2 \Rightarrow p = 1$

stämmer också

6c)

h	"$\lvert R_T(h)\rvert$"
$1/4000$	$8.44\cdot 10^{-15}$
$1/8000$	$1.11\cdot 10^{-15}$
$1/16.000$	$7.88\cdot 10^{-15}$

Felen avtar inte längre då h minskas. Trunkeringsfelen för dessa h är i princip noll*) och det är avrundningsfel som syns i tabellen. Dessa går inte att använda för att avgöra noggrannhetsordningen.

*) för flyttalssystemet

7. a) Matrisen i normalekvationerna kommer att få ett stort konditionstal med den sämre ansatsen.

b) Lagrange metod ger färre beräkningar om polynomet bara ska evalueras ett fåtal gånger.

8. a) $\left(\begin{array}{cccc|c} x & & & & x \\ x & x & & & x \\ x & x & x & & x \\ x & x & x & x & x \end{array}\right)$

$y_1 = \frac{x}{x}$ 1 a.o.

$y_2 = \frac{x - x\cdot x}{x}$ 3a.o

$\vdots$

$y_n = \frac{x - \overbrace{x\cdot x - x\cdot x - \cdots - x\cdot x}^{n-1 \text{ termer}}}{x}$ 2n-1 a.o

$$1+3+5+\cdots+(2n-1) = \frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n = n^2$$

b) testekv $y' = \lambda y$ $\lambda < 0$

Euler $y_{i+1} = y_i + h\lambda y_i = (1+h\lambda)y_i$ ger $y_n = (1+h\lambda)^n \cdot y_0$

stabilitetsvillkor $|1+h\lambda| \leq 1$ dvs $-1 \leq 1+h\lambda \leq 1$

$-1 \leq 1+h\lambda$ $1+h\lambda \leq 1$

$-2 \leq h\lambda$ $h\lambda \leq 0$

$\frac{-2}{\lambda} \geq h$ $h \geq 0$ så $0 \leq h \leq \frac{-2}{\lambda}$

7c) $z' = Az + b$

trapetsmetoden: $z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}(Az_i + b + Az_{i+1} + b)$

$$\underbrace{\left(I - \frac{h}{2}A\right)}_{\text{matris}} z_{i+1} = \underbrace{\left(I + \frac{h}{2}A\right) z_i + h \cdot b}_{\text{uträknad vektor}}$$

I varje steg måste ett ekvationssystem lösas.
Då A är ober. av x kan $I - \frac{h}{2} \cdot A$ LU-uppdelas
och framåt- och bakåtsubstitution ger effektivare lösning.

d) N-R: $x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^2}{2x_i} = \frac{x_i}{2}$, roten är $x^* = 0$

$$x_{i+1} - 0 = \frac{1}{2} x_i - 0$$

$$|x_{i+1} - x^*| = \frac{1}{2} |x_i - x^*|^1$$

e) $D_+D_- f(x) = \frac{f(x-h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} =$

$$\frac{1}{h^2}\Big(f(x) - h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) - \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \quad -2f(x) +$$
$$f(x) + h \cdot f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \dots \Big) =$$

$$f''(x) + \frac{2h^2}{4!} f^{IV}(x) + O(h^4) \qquad c = \frac{f^{IV}(x)}{12}$$