Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2016-10-24

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $14^{00} - 18^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén/Skoglund), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Närmevärdet 1.61024 har ett **relativt** fel ≤ 0.005. Hur många korrekta decimaler har närmevärdet? (1p)

   (b) Förklara hur trunkeringsfelet och hur avrundningsfelet påverkar resultatet vid beräkning av differenskvoter. (Varför lönar det sig inte att använda ett alltför litet h?) (1p)

   (c) Förklara vad det är för skillnad mellan kvadratiska splines och kvadratisk interpolation. (1p)

   (d) Skriv om $y''' = y'' - 2y' + 7y + 5,\ y(0) = 3,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 2$, till system av första ordningen. Skriv systemet på matrisform, $z' = Az + b$. (1p)

   (e) Vad menas med att en metod är implicit? Vad är fördelen med sådana metoder vid lösning av ordinära differentialekvationer med begynnelsevillkor? (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt
$$f = \sqrt{x^4 + 4} - 2 \text{ och } |x| \ll 1.$$
Gör en beräkningsfelsanalys då vi antar att varje beräkning utförs med ett relativt fel $\leq \mu$. Ange det relativa beräkningsfelet uttryckt i x och μ. (2p)

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} -0.8 & 0.28 & -1.22 \\ -4 & -2.2 & 4 \\ 3.2 & 2.96 & -0.9 \end{pmatrix}$$
LU-faktorisera A. Använd partiell pivotering. (2p)

4. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7
$f(x)$	1.428	1.753	2.164	2.658	3.232

   (a) Uppskatta $f(1.56)$ med hjälp av kvadratisk interpolation med Newtons metod. (1p)

   (b) Bestäm den konstant $p(x) = c$ som bäst approximerar punkterna i minsta kvadratmening. (1p)

   (c) Uppskatta $\int_{1.3}^{1.7} f(x)\,dx$ med Simpsons regel samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

5. Betrakta
$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

   (a) Använd Euler framåt och $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(0.3)$. (1p)

   (b) Använd Euler bakåt och $h = 0.3$ för att beräkna en approximation till $y(0.3)$. (1p)

6. Ekvationen $4x = x^5 + 1$ har en rot i intervallet $[0.2, 0.3]$. Gör 2 iterationer med intervallhalveringsmetoden och uppskatta felet i mittpunkten med metodoberoende feluppskattning. (Strikt feluppskattning krävs inte.)

   (1p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

7. LU-uppdelningen av en $n \times n$-matris A har beräknats och U-matrisen används sedan för att lösa ekvationssystemet $Ux = y$.

   (a) Följande tabell visar den tid i sekunder det tog att lösa $Ux = y$ på en viss dator.

n	1500	3000	6000	12000
t	0.002962	0.010027	0.037807	0.148439

   Är den aritmetiska komplexiteten som förväntad? (1p)

   (b) Bedöm förutsättningarna att få en noggrann lösning till $Ux = y$ om $\kappa_\infty(U) \approx 10^{16}$ och $||\Delta y||_\infty/||y||_\infty \leq \mu \approx 1.1 \cdot 10^{-16}$. (1p)

8. Andraderivatan i $x = 1$ för en funktion $f(x)$ har beräknats numeriskt med ett program för differensapproximationen $D_+D_-f(1)$. För olika steglängder, h, har trunkeringsfelen uppskattats enligt tabellen nedan.

h	$1/9$	$1/27$	$1/81$
$\lvert R_T(h)\rvert$	0.3226	0.1029	0.0338

   Är noggrannhetsordningen som förväntad? (1p)

9. (a) Diskutera förutsättningarna för att noggrant uppskatta $f(1.3)$ utifrån tabellen

x	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4
$f(x)$	1.3153	2.0000	1.3153	0.8779	0.7354	0.6098	0.5000	0.4098	0.3378

   med ett polynom som interpolerar alla punkterna. (1p)

   (b) Vi vill interpolera funktionen $f(x) = 8x^2 - x^5$ på intervallet $[0, 1]$ med en naturlig kubisk splinefunktion, $s(x)$. I vilket delintervall kan vi förvänta oss störst avvikelse mellan $f(x)$ och $s(x)$ om intervallet delas i 10 lika stora delintervall? (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

10. (a) Härled, utifrån definitionen av absolut fel, felfortplantning för multiplikation $f = xy$. Jämför med maximalfelsuppskattning. Vilken term försummas? (1p)

    (b) Låt A vara en $n \times n$-matris. Visa hur $A^4x = b$ kan lösas med $O(n^2)$ aritmetiska operationer om LU-faktoriseringen $PA = LU$ är känd. (1p)

    (c) Visa att
    $$\frac{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} = f''(x) + O(h^p).$$
    Vilket p gäller? (1p)

    (d) Heuns metod ska användas för att lösa $y' = -8y + 2$. Avgör utifrån stabilitetskravet om metoden är stabil för $h = 0.3$. (1p)

    (e) Visa att fixpunktsiteration normalt har linjär konvergens. (1p)

Svar TANA21/TANA22 2016-10-24

1 a) 1.61024 ± 0.00806 har 1 k.d.

b) Trunkeringsfelet beror på h eller h^2 och minskar då $h \to 0$ medan beräkningsfelen istället beror på $\frac{1}{h}$ eller $\frac{1}{h^2}$ och ökar. då $h \to 0$. Det beror på att det är kancellation i uttrycket. Ett optimalt $h > 0$ finns och ett alltför litet h medför ett större fel i resultatet (p.g.a beräkningsfelet).

c) Vid kvadratisk interpolation går ett andragradspolynom genom 3 punkter. Vid kvadratisk spline interpoleras ett godtyckligt antal punkter med andragradspolynom som är olika på varje delintervall men har kont. förstaderivata.

d)
$$\begin{cases} u = y & u' = v \\ v = y' & v' = w \\ w = y'' & w' = w - 2v + 7u + 5 \end{cases} \qquad z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e) I en implicit metod ingår y_{n+1} i $f(x,y)$. De är stabila för alla $h > 0$ och speciellt lämpliga för styva system av differentialekvationer.

2. $$f = \underbrace{\sqrt{\underbrace{\underbrace{x^4}_{a} + 4}_{b}}}_{c} - 2 \;\Big\}\, d \qquad = \sqrt{a+4} - 2 = \sqrt{16} - 2 = c - 2 = d \approx \frac{x^4}{4}$$

det gäller $|\Delta a| \leq \mu |a|$
p.s.s för b, c och d.

$$|\Delta f| \lesssim \left| \frac{1}{2\sqrt{a+4}} \mu a \right| + \left| \frac{1}{2\sqrt{16}} \mu b \right| + |\mu \cdot c| + |\mu \cdot d| \approx$$

$$\mu\left(\frac{1}{4} \cdot x^4 + \frac{1}{4} \cdot 4 + 2 + |f|\right) \approx \mu\left(3 + \frac{x^4}{2}\right) \approx 3\mu \qquad \left|\frac{\Delta f}{f}\right| \lesssim \frac{12}{x^4} \mu$$

3. $\begin{pmatrix} -0.8 & 0,28 & -1,22 \\ -4 & -2.2 & 4 \\ 3.2 & 2,96 & -0,9 \end{pmatrix} \overset{\text{byt } 1 \circ 2}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & -2,2 & 4 \\ -0,8 & 0.28 & -1.22 \\ 3.2 & 2,96 & -0,9 \end{pmatrix} \sim$

$\begin{pmatrix} -4 & -2,2 & 4 \\ 0.2 & 0,72 & -2,02 \\ -0,8 & 1.2 & 2,3 \end{pmatrix} \overset{\text{byt } 2 \circ 3}{\sim} \begin{pmatrix} -4 & -2.2 & 4 \\ -0,8 & 1.2 & 2.3 \\ 0.2 & 0.72 & -2.02 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -4 & -2,2 & 4 \\ -0.8 & 1.2 & 2.3 \\ 0.2 & 0,6 & -3.4 \end{pmatrix}$

$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0,8 & 1 & \\ 0.2 & 0,6 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -4 & -2.2 & 4 \\ & 1.2 & 2.3 \\ & & -3,4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4 a) ansats $p(x) = C_1 + C_2(x-1.5) + C_3(x-1.5)(x-1.6)$

$C_1 = 2.164$

$2.164 + C_2 \cdot 0,1 = 2,658 \Rightarrow C_2 = 4.94$

$2.164 + 4.94 \cdot 0,2 + C_3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 3,232 \Rightarrow C_3 = 4$

$p(1.56) = 2.4508$ alternativt med 1.4, 1.5, 1.6 $p(1.56) = 2.45044$

b) ansats $p(x) = C$

$1 \cdot C = 1,428$

$1 \cdot C = 1,753$

$1 \cdot C = 2.164$

$1 \cdot C = 2.658$

$1 \cdot C = 3.232$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad A^TA = 5 \quad A^Tf = 11.235$

$C = 2.247$

c) $S(0.1) = \frac{0.1}{3}(1,428 + 4 \cdot 1.753 + 2 \cdot 2.164 + 4 \cdot 2.658 + 3.232)$
$= 0.885733\ldots$

$S = \frac{h}{3}(f_0 + 4 \cdot f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) \qquad |\Delta f_i| \leq \varepsilon = 0.0005$

$|\Delta S| \leq \left|\frac{\partial S}{\partial f_0}\Delta f_0\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial f_1}\Delta f_1\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial f_2}\Delta f_2\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial f_3}\Delta f_3\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial f_4}\Delta f_4\right| \leq$

$\frac{h}{3} \cdot \varepsilon + \frac{4h}{3} \cdot \varepsilon + \frac{2h}{3} \cdot \varepsilon + \frac{4h}{3} \cdot \varepsilon + \frac{h}{3} \cdot \varepsilon = \frac{h}{3} \cdot 12\varepsilon \leq 2 \cdot 10^{-4}$

5. $y' = xy^2, \quad y(0) = 1 = y_0, \quad f(x,y) = x \cdot y^2$

a) $y_1 = 1 + 0{,}1 \cdot f(0,1) = 1 + 0{,}1 \cdot 0 = 1$

$y_2 = 1 + 0{,}1 \cdot f(0.1, 1) = 1 + 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 1^2 = 1{,}01$

$y_3 = 1{,}01 + 0{,}1 \cdot f(0.2, 1.01) = 1.01 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}01^2 = 1{,}030402$

$y(0{,}3) \approx 1{,}0304$

b) $y_1 = y_0 + h \cdot f(x_1, y_1) = y_0 + 0{,}3 \cdot x_1 \cdot y_1^2 = 1 + 0{,}09 \cdot y_1^2$

$y_1^2 + \frac{1}{0{,}09} - \frac{y_1}{0{,}09} = 0 \qquad y_1 = +\frac{1}{2 \cdot 0{,}09} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 0{,}09}\right)^2 - \frac{1}{0{,}09}}$

$y_1 \approx 1.111\ldots$ är rimligt

6. $f(x) = x^5 - 4x + 1 \qquad f'(x) = 5x^4 - 4$

$f(0{,}2) = 0{,}200\ldots \qquad f(0{,}3) = -0{,}19\ldots \quad \Rightarrow x^* \in [0{,}2, 0{,}3]$

$f(0{,}25) = 9{,}7\ldots 10^{-4} \quad \Rightarrow x^* \in [0{,}25, 0{,}3]$

$f(0{,}275) = -0{,}098\ldots \quad \Rightarrow x^* \in [0{,}25, 0{,}275]$

$\bar{x} = 0{,}2625 \qquad |\bar{x} - x^*| \leq \frac{0{,}049}{3{,}9} \leq 0{,}013$

7. a) triangulärt ekv.system, borde vara $O(n^2)$ a.o.

n	t	$t(2n)/t(n) \approx 2^p$
1500	0,002962	3,38…
3000	0,010027	3,77…
6000	0,037807	3,92…
12000	0,148439	

$\to 4 = 2^2$ OK.

b) $\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \kappa_\infty(U) \frac{\|\Delta y\|_\infty}{\|y\|_\infty} \lesssim 10^{16} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-16} = 1{,}1$

Förutsättningen är inte bra. Om relativa felet är större än 1 kan felet vara större än närmevärdet och man kan inte lita på resultatet.

8. $|R_T(h)| \approx c \cdot h^p$

$\frac{|R_T(3h)|}{|R_T(h)|} \approx 3^p$

förväntat för $D_+D_-f(1)$ är $p=2$

h	$\|R_T(h)\|$	kvot
1/9	0.3226	3.1...
1/27	0.1029	3.0...
1/81	0.0338	

kvoten är ungefär 3 vilket ger $p=1$.
Nej, ej som förväntat (troligen fel i programmet.)

9. a) Vi söker funktionens värde i slutet av tabellen som har 9 punkter. Ett interpolerande polynom har då grad 8 och det finns risk för att det svänger, speciellt vid kanterna (Runges fenomen). Det kan bli svårt att få en bra approximation till $f(1.3)$.

b) Vi sätter $s''(0)=0$ och $s''(1)=0$

för $f(x)=8x^2-x^5$ gäller $f'(x)=16x-5x^4$

$f''(x)=16-20x^3$

$f''(0)=16$

$f''(1)=-4$

Det borde bli störst avvikelse i första delintervallet.

10. a) $\Delta x=\bar{x}-x$, $\Delta y=\bar{y}-y$

$\Delta f=\bar{f}-f=\bar{x}\cdot\bar{y}-x\cdot y=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-x\cdot y=$

$y\cdot\Delta x+x\cdot\Delta y+\Delta x\cdot\Delta y$ ger

$|\Delta f|\leq|y\cdot\Delta x|+|x\cdot\Delta y|+|\Delta x\cdot\Delta y|$

maximalfelsuppskattningen blir

$|\Delta f|\lesssim|y\cdot\Delta x|+|x\cdot\Delta y|$ alltså försummas $|\Delta x\cdot\Delta y|$.

b) $\underbrace{A\cdot A\cdot \overbrace{A\cdot \underbrace{A\cdot X}_{z_3}}^{z_2}}_{z_1}=b$ lös $A\cdot z_1=b$ $\quad L\cdot\underbrace{U\cdot z_1}_{y_1}=P\cdot b$

$A\cdot z_2=z_1$

$A\cdot z_3=z_2$

$A\cdot X=z_3$

```
sätt z = b
for i = 1:4
    y = fram(L, P·z)
    z = bak(U, y)
end
x = z
```

kostar $4 \cdot 2 \cdot n^2 = O(n^2)$ a.o.

c) $\frac{1}{h^2}\left(f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\right) =$

$\frac{1}{h^2}\Big(f(x) - 2\big(f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \dots\big)$

$+ f(x) - 2h \cdot f'(x) + \frac{4h^2}{2!}f''(x) - \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \dots \Big) =$

$\frac{1}{h^2}\Big(f(x)(1-2+1) + f'(x)(2h-2h) + f''(x)\left(-\frac{2h^2}{2!} + \frac{4h^2}{2!}\right) +$

$f'''(x)\left(\frac{2h^3}{3!} - \frac{8h^3}{3!}\right) = f''(x) - h \cdot f'''(x) + O(h^2)$ V.S.V.

$p = 1$ gäller

d) $y' = -8y + 2$

Heun på $y' = \lambda y$ $(\lambda = -8)$

$k_1 = \lambda y_0$

$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_1) = f(x_1, y_0 + h\lambda y_0) = \lambda(y_0 + h\lambda y_0)$

$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(\lambda y_0 + \lambda(y_0 + h\lambda y_0)) = y_0\left(1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}\right)$

amplifikationsfaktorn är $a = 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2}$ $|a| < 1$ krävs

$a = 1 + 0.3(-8) + \frac{(0.3 \cdot 8)^2}{2} = 1.48$ $h = 0.3$ är instabil

e) fixpunktsiteration $x_{i+1} = \varphi(x_i)$

$\underbrace{\varphi(x_i)}_{x_{i+1}} - \underbrace{\varphi(x^*)}_{x^*} = \varphi'(\xi)(x_i - x^*)$ $\xi \in [x_i, x^*]$

$|x_{i+1} - x^*| = \underbrace{|\varphi'(\xi)|}_{C} \cdot |x_i - x^*|^1$ ← $p = 1$, dvs linjär konvergens