Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2016-08-22

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $14^{00} - 18^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Flera uppgifter kan lösas på samma blad.
Betygsgränser är 3: 10p, 4: 15p, 5: 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Närmevärdet 160822 har ett **relativt** fel $\leq 1.2\%$. Hur många signifikanta siffror har närmevärdet? (1p)

   (b) Förklara kancellation. (1p)

   (c) Bestäm $||A||_1$ då $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. (1p)

   (d) Förklara vad som menas med naturliga splines. (1p)

   (e) En numerisk metod beräknar, givet x_0, en sekvens x_1, x_2,... som konvergerar mot x^*. Vilken konvergensordning har metoden om sekvensen uppfyller
   $|x_{i+1} - x^*| \leq 0.3|x_i - x^*|$? (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. (a) Låt

$$A = \begin{pmatrix} -0.6 & 4 & -0.8 \\ -0.9 & 1.8 & 5.9 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad b = \begin{pmatrix} 4.8 \\ 129.8 \\ 78.0 \end{pmatrix}$$

   LU-faktorisera A. Använd partiell pivotering. (2p)

   (b) Lös $Ax = b$ med hjälp av din LU-faktorisering. (1p)

3. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	0.35	0.40	0.45	0.50	0.55
$f(x)$	0.37	0.42	0.48	0.55	0.62

   (a) Uppskatta $f(0.42)$ med hjälp av kvadratisk interpolation. (1p)

   (b) Uppskatta $f(0.42)$ med hjälp av det polynom $p(x) = c_1 + c_2(x - 0.45) + c_3(x - 0.45)^2$ som bäst approximerar punkterna i minsta kvadratmening. (1p)

   (c) Uppskatta $\int_{0.35}^{0.55} f(x)\,dx$ med Simpsons regel samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

   (d) Uppskatta $f'''(0.45)$ samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena.
   Ledning: $f'''(x) \approx \dfrac{-f(x-2h) + 2f(x-h) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h^3}$ (1p)

4. Betrakta

$$y'' = xy' - y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

   Använd Euler framåt och $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(0.3)$. (2p)

5. Ekvationen $e^x - x^3 = 0$ har en rot nära 1.9. Bestäm en approximation till roten med ett fel mindre än $0.5 \cdot 10^{-4}$. (Ska visas med feluppskattning men strikt feluppskattning krävs inte.) (1p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. En differentialekvation har lösts flera gånger med en Runge-Kuttametod. Vid varje beräkning har en konstant steglängd $h_i = h = 1/n$ använts. Lösningen y_n i intervallets sista punkt x_n och den tid t i millisekunder som beräkningen tog visas i tabellerna nedan.

n	2	4	8	16	32	64
y_n	8.32617187	0.35724394	0.35753286	0.35770903	0.35772694	0.35772882

n	1000	2000	4000	8000	16000
t	0.05	0.08	0.15	0.27	0.54

   (a) Förklara varför resultatet med det minsta n-värdet skiljer sig från de övriga. (1p)

   (b) Vilken noggrannhetsordning verkar metoden ha? (1p)

   (c) Verkar den aritmetiska komplexiteten vara som förväntad? (1p)

7. (a) Ekvationssystemet $Ax = b$ ska lösas i Matlab då

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-17} & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

   Bedöm förutsättningen för att erhålla en noggrann datorlösning utan partiell pivotering. (Förklara och motivera.) (1p)

   (b) Ett ekvationssystem $Ax = b$ löstes med $b = (2,\ 2,\ 2,\ 2)^T$. När högerledet ändrades till $\tilde{b} = (2.1,\ 1.9,\ 2.1,\ 1.9)^T$ ändrades lösningen (med 4 decimaler) från
   $x = (-1.2916,\ 1.5792,\ 4.7069,\ -2.5715)^T$ till
   $\tilde{x} = (-1.2961,\ 1.5541,\ 4.4900,\ -2.1662)^T$.
   Bedöm om ändringen i lösningen är rimlig då $\kappa_\infty(A) \approx 43.3$. (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Låt $\bar{x}$ vara en korrekt avrundad representation av talet x i ett flyttalssystem med basen b, t siffror i bråkdelen och exponent mellan e_{min} och e_{max}. Visa att

$$\frac{|\bar{x} - x|}{|x|} \leq \varepsilon_M/2, \qquad \text{där } \varepsilon_M = b^{-t}.$$ (1p)

   (b) Visa att

$$\frac{-f(x-2h) + 2f(x-h) - 2f(x+h) + f(x+2h)}{2h^3} = f'''(x) + O(h^p).$$

   Vilket p gäller? (1p)

   (c) Antag att funktionen $f(x)$ är n gånger deriverbar och att $p(x)$ är det polynom av grad $n-1$ som interpolerar punkterna $(x_i, f(x_i))$, $i = 1, 2, .., n$. Då finns det för varje x ett ξ så att

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$$

   Låt $h = x_2 - x_1$ och visa att $|f(x) - p(x)| \leq ch^2$ vid linjär interpolation samt ange ett uttryck för c.

   (1p)

   (d) Hur många aritmetiska operationer kräver Simpsons formel? (1p)

   (e) Visa att det lokala trunkeringsfelet för Euler bakåt är $O(h^2)$. (1p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TANA22
2016-08-22

Svar till tentamen i Beräkningsmatematik

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) $a = 160822, \quad |\Delta a| \leq 1930 = 0.193 \cdot 10^4$, 2 signifikanta siffror.

   (b) Kancellation uppstår vid subtraktion av två nästan lika stora tal. Eftersom felen adderas och närmevärdet blir litet fås ett stort relativt fel, dvs en noggrannhetsförlust.

   (c) $||A||_1 = \max(8, 9, 10) = 10$

   (d) Naturliga splines är kubiska splines på $[a,\ b]$ med $s''(a) = 0$ och $s''(b) = 0$. Kubiska splines är styckvisa tredjegradpolynom. (En kubisk spline med naturliga ändpunktsvillkor går som en böjlig linjal genom de givna punkterna utan böjning i första och sista noden.)

   (e) Konvergensordningen är linjär.

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. (a) Börja med att byta rad 1 och 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -0.9 & 1.8 & 5.8 \\ -0.6 & 4 & -0.8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -0.3 & 2.1 & 6.2 \\ -0.2 & 4.2 & -0.6 \end{pmatrix}$$

Byt rad 2 o 3:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -0.2 & 4.2 & -0.6 \\ -0.3 & 2.1 & 6.2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -0.2 & 4.2 & -0.6 \\ -0.3 & 0.5 & 6.5 \end{pmatrix}$$

<u>Svar</u>: $L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ -0.2 & 1 & \\ -0.3 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ & 4.2 & -0.6 \\ & & 6.5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) Lös först $Ly = Pb = \begin{pmatrix} 78 & 4.8 & 129.8 \end{pmatrix}^T \quad \Rightarrow \quad y = \begin{pmatrix} 78 & 20.4 & 143 \end{pmatrix}^T$

   Lös sedan $Ux = y \quad \Rightarrow$ <u>Svar</u>: $x = \begin{pmatrix} 16 & 08 & 22 \end{pmatrix}^T$

3. (a) T.ex. enligt Lagrange:

$$p(x) = 0.37\frac{(x-0.4)(x-0.45)}{(0.35-0.4)(0.35-0.45)} + 0.42\frac{(x-0.35)(x-0.45)}{(0.4-0.35)(0.4-0.45)} + 0.48\frac{(x-0.35)(x-0.4)}{(0.45-0.35)(0.45-0.4)}$$

   $p(0.42) = 0.4428$

   eller Newton: $p(x) = 0.37 + 1 \cdot (x - 0.35) + 2 \cdot (x - 0.35)(x - 0.4)$

   Det går också att använda $x = 0.4, x = 0.45$ och $x = 0.5$ vilket ger samma svar.

   (b) Ansats $p(x) = c_1 + c_2(x - 0.45) + c_3(x - 0.45)^2$

   Normalekvationerna blir $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0.025 \\ 0 & 0.025 & 0 \\ 0.025 & 0 & 0.0002125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.44 \\ 0.0315 \\ 0.012325 \end{pmatrix}$

   $p(x) = 0.480857... + 1.26(x - 0.45) + 1.42857...(x - 0.45)^2, \quad p(0.42) = 0.4443428..$

   (c) $S(h) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4) = \frac{0.05}{3}(0.37 + 4 \cdot 0.42 + 2 \cdot 0.48 + 4 \cdot 0.55 + 0.62) = 0.097166...$

   $S = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + f_4), \quad |\Delta S| \lesssim \frac{h}{3}(|\Delta f_0| + 4|\Delta f_1| + 2|\Delta f_2| + 4|\Delta f_3| + |\Delta f_4|) \leq \frac{0.05}{3}(12 \cdot 0.005) = 0.001$

   (d) $f'''(0.45) \approx \frac{-0.37 + 2 \cdot 0.42 - 2 \cdot 0.55 + 0.62}{2 \cdot 0.05^3} = -40$

   $z = \frac{-f_0 + 2 \cdot f_1 - 2 \cdot f_3 + f_4}{2h^3}, \quad |\Delta z| \lesssim \frac{1}{2h^3}(|\Delta f_0| + 2|\Delta f_1| + 2|\Delta f_3| + |\Delta f_4|) \leq \frac{6 \cdot 0.005}{2 \cdot 0.05^3} = 120$

   Det krävs bättre noggrannhet i funktionsvärdena för att approximationen ska bli trovärdig.

4. Sätt t.ex. $\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases}$ ger $\begin{cases} u' = v, & u(0) = 1, \\ v' = xv - u, & v(0) = 2. \end{cases}$

x	u	$h \cdot v$	v	$h(xv - u)$
0	1	0.2	2	-0.1
0.1	1.2	0.19	1.9	-0.101
0.2	1.39	0.1799	1.799	
0.3	1.5699			

Svar: $y(0.3) \approx 1.5699$

5. Använd t.ex. Newton-Raphsons metod $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

Då $f(x) = e^x - x^3$, $f'(x) = e^x - 3x^2$ och $x_0 = 1.9$ erhålls $\quad x_1 = 1.8582\ldots \quad x_2 = 1.857184\ldots$

Med $\bar{x} = 1.85718$ ger metodoberoende feluppskattning

$|\bar{x} - x^*| = \dfrac{|f(\bar{x})|}{|f'(\xi)|} \approx \dfrac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} \leq 3.9 \cdot 10^{-6}$ så $\bar{x}$ är tillräckligt noggrann.

Med $\bar{x} = 1.8572$ ger metodoberoende feluppskattning $|\bar{x} - x^*| \leq 1.7 \cdot 10^{-5}$ så även $\bar{x} = 1.8572$ är tillräckligt noggrann.

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. (a) Runge-Kuttametoder kan bli instabila för vissa typer av differentialekvationer. Med $h = 0.5$ blir metoden inte stabil och ett felaktigt har värde beräknats.

(b) Ansätt $y_n(h) \approx c_0 + c_p h^p$. Formeln

$$\frac{y_n(4h) - y_n(2h)}{y_n(2h) - y_n(h)} \approx \frac{c_0 + c_p 4^p h^p - (c_0 + c_p 2^p h^p)}{c_0 + c_p 2^p h^p - (c_0 + c_p h^p)} = \frac{2^p(2^p - 1)}{(2^p - 1)} = 2^p$$

ger $1.64\ldots$ för $h = 1/16$, $9.83\ldots$ för $h = 1/32$, och $9.52\ldots$ för $h = 1/64$. Bortse från den första kvoten eftersom approximationer nära stabilitetsgränsen kan vara dåliga värden och se att de andra verkar kunna gå mot 8, vilket tyder på noggrannhetsordningen är $p = 3$.

(c) Förväntad aritmetisk komplexitet är linjär eftersom det kommer att krävas dubbelt så många beräkningar om steglängden halveras.

Ansätt $t(n) \approx a_p n^p$. Formeln

$$\frac{t(2n)}{t(n)} \approx \frac{a_p 2^p n^p}{a_p n^p} = 2^p$$

ger $1.6\ldots$ för $n = 1000$, $1.875\ldots$ för $n = 2000$ $1.8\ldots$ för $n = 4000$ och $2\ldots$ för $n = 8000$, vilket tyder på att kvoten verkar gå mot 2 och ge det förväntade $p = 1$.

7. (a) På grund av det lilla pivotelementen kommer man att få en stor multiplikator vid Gausseliminationen. Det medför att matriselementen kan bli stora och därmed få stora avrundningsfel. Det kan dessutom bli stora avrundningsfel under beräkningen och förutsättningen för att erhålla en noggrann lösning är inte så god.

(b) Det relativa felet i lösningen bör inte vara större än vad den teoretiska uppskattningen ger:

$$\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty \cdot \frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} = \kappa_\infty(A) \frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} \leq 43.3 \frac{0.1}{2} \leq 2.165$$

I praktiken blev det $\dfrac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq \dfrac{0.4053}{4.7069} \leq 0.0861$ så förändringen är inte orimligt stor.

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) $x = m \cdot b^e$ och $|\Delta m| \leq 0.5 \cdot b^{-t}$ ger $\dfrac{|\Delta x|}{|x|} \leq \dfrac{|\Delta m| \cdot b^e}{|x|} \leq \dfrac{0.5 \cdot b^{-t} \cdot b^e}{|m| \cdot b^e} \leq 0.5 \cdot b^{-t} = \varepsilon_M/2$

(b)
$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) + \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \frac{16h^4}{4!}f^{iv}(x) + \frac{32h^5}{5!}f^{v}(x) + \ldots$$
$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \ldots$$
$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) - \frac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \ldots$$
$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{4h^2}{2}f''(x) - \frac{8h^3}{3!}f'''(x) + \frac{16h^4}{4!}f^{iv}(x) - \frac{32h^5}{5!}f^{v}(x) + \ldots$$

$\frac{1}{2h^3}\Big(f(x+2h)-2(f(x+h)+2f(x-h)-f(x-2h)\Big)=$
$=\frac{1}{2h^3}\Big[f(x)\cdot(1-2+2-1)+hf'(x)\cdot(2-2-2+2)+\frac{h^2}{2}f''(x)(4-2+2-4)+\frac{h^3}{3!}f'''(x)\cdot(8-2-$
$2+8)+\frac{h^4}{4!}f^{iv}(x)(16-2+2-16)+\frac{h^5}{5!}f^{v}(x)(32-2-2+32)+\ldots\Big]=f'''(x)+\frac{h^2}{4}f^{v}(x)+\ldots$
Svar: $R_T=a_2h^2+a_4h^4+\ldots,$ där $a_2=\frac{1}{4}f^{v}(x)$, dvs $p=2$ och bara jämna potenser i utvecklingen.

(c) $n=2$. Eftersom $|(x-x_1)(x-x_2)|$ har maximum då $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ och $h=x_2-x_1$ fås
$|f(x)-p(x)|\leq\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_1)(x-x_2)\right|\leq\left|\frac{f''(\xi)}{2!}\right||(x-x_1)(x-x_2)|\leq\left|\frac{f''(\xi)}{2!}\right|\cdot\frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}=$
$\frac{|f''(\xi)|}{8}h^2$ så $c=\frac{|f''(\xi)|}{8}$.

(d) Simpsons formel kräver $n-1$ multiplikationer med 2 eller 4, n additioner, 1 multiplikation med h och 1 division med 3, så totalt $2n+1$ arimetiska operationer.

(e) Se exempelsamling 9.15 b).