Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2016-01-05

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $8^{00} - 12^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Betygsgränser är 3 : 10p, 4 : 15p, 5 : 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Hur många korrekta decimaler har närmevärdet då $a = 151.026 \pm 0.007$? (1p)

   (b) Ange maskinepsilon för ett flyttalssystem med bas 2, 23 bråkdelssiffror och exponent mellan -126 och 127. (1p)

   (c) Förklara skillnaden mellan kubisk interpolation och interpolation med kubiska splines. (1p)

   (d) Förklara skillnaden mellan lokalt och globalt trunkeringsfel. (1p)

   (e) Skriv om $y''' = y'' - xy' + y,\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 1$, till system av första ordningen. (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -0.6 & 4.2 & -0.8 \\ 0.9 & 2.5 & -6 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } b = \begin{pmatrix} -22.8 \\ -44.2 \\ -4.0 \end{pmatrix}$$

   (a) LU-faktorisera A. Använd partiell pivotering. (2p)

   (b) Lös $Ax = b$ med hjälp av din LU-faktorisering. (1p)

   (c) Uppskatta $||\Delta x||_\infty / ||x||_\infty$ om elementen i b är korrekt avrundade och $||A^{-1}||_\infty \leq 0.62$. (1p)

3. Använd följande tabell i uppgifterna nedan. Funktionsvärdena är korrekt avrundade.

x	1.2	1.4	1.6
$f(x)$	1.65	1.75	1.82

   (a) Uppskatta $f(1.44)$ med linjär interpolation. (1p)

   (b) Uppskatta $f(1.44)$ med den kvadratiska spline som uppfyller $f'(1.2) = 0$. (2p)

   (c) Uppskatta $\int_{1.2}^{1.6} f(x)\, dx$ med trapetsregeln samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

4. Betrakta

$$y' = xy - \cos y, \quad y(0) = 1.$$

   (a) Använd Euler framåt och $h = 0.1$ för att beräkna en approximation till $y(0.2)$. (1p)

   (b) För att beräkna en approximation till $y(0.2)$ med trapetsmetoden och $h = 0.2$ behöver man lösa ekvationen

$$0.98y_1 + 0.1\cos y_1 + 0.1\cos 1 - 1 = 0$$

   där $y_1 \approx y(0.2)$. Uppskatta felet i $\bar{y}_1 = 0.9$ och gör sedan en iteration med Newton-Raphsons metod. (1p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

5. Diskutera möjligheten att numeriskt beräkna ett noggrant närmevärde till $y = \dfrac{e^x - 1}{x}$, speciellt om $|x| \ll 1$. (1p)

6. Derivatan av en funktion har beräknats med $D_0 f(1)$ för olika steglängder h och jämförts med det kända exakta värdet för att erhålla trunkeringsfelen, $|R_T(h)|$, i tabellen nedan.

h	0.025	0.0125
$\lvert R_T(h)\rvert$	$5.628 \cdot 10^{-5}$	$1.407 \cdot 10^{-5}$

   (a) Är noggrannhetsordningen som förväntad? (Motivera.) (1p)

   (b) Vad händer om h väljs alltför litet? (1p)

7. En ickelinjär ekvation har lösts med en numerisk metod. I tabellen nedan finns några iterationer tabulerade.

k	x_k
1	0.58197671
2	0.67669270
3	0.69408140
4	0.69313947
5	0.69314718
6	0.69314718

   (a) Avgör vilken konvergensordning metoden har. (1p)

   (b) Diskutera förutsättningarna för att noggrant beräkna en dubbelrot med Newton-Raphsons metod. (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Visa att det lokala trunkeringsfelet för Euler framåt är $O(h^2)$. (1p)

   (b) Härled stabilitetsvillkoret för Euler framåt. (1p)

   (c) Visa att interpolation med Newtons metod ger ett undertriangulärt ekvationssystem med entydig lösning, under antagandet att punkternas x-koordinater är distinkta. (1p)

   (d) För att lösa ekvationen $x = g(x)$ används fixpunktsiterationen $x_{i+1} = g(x_i)$. Visa att $|g'(x)| < 1$ i en omgivning till x^* krävs för konvergens. (1p)

   (e) Hur många aritmetiska operationer kräver Simpsons formel? (1p)

Svar TANA21, TANA22 2016-01-05

1 a) $|\Delta a| \leq 0.07 \cdot 10^{-1}$ ger 1 korrekt decimal

b) $\varepsilon_M = 2^{-23} \approx 1.2 \cdot 10^{-7}$

c) Vid kubisk interpolation används ett tredjegrads-polynom genom 4 punkter. Vid kubiska splines får vi 3 olika tredjegradspolynom då vi interpolerar 4 punkter.

d) Med en metod som löser ordinära differential-ekvationer fås ett lokalt trunkeringsfel efter ett steg givet att $y_0 = y(x_0)$. Globalt trunkeringsfel är skillnaden mellan numerisk lösning och den exakta efter flera steg.

e)
$$\begin{cases} u' = v & u(0) = 3 \\ v' = z & v(0) = 2 \\ z' = z - x \cdot v + u & z(0) = 1 \end{cases}$$

2a)
$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 0.2 & 1 & \\ -0.3 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ & 4 & -1 \\ & & -5 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $y = (-4 \ \ -22 \ \ -30)^T \qquad x = (2 \ \ -4 \ \ 6)^T$

c) $\dfrac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 9.4 \cdot 0.62 \cdot \dfrac{0.05}{44.2} \leq 6.6 \cdot 10^{-3}$

3 a) $p(1.44) = 1.764$

b) $s(1.44) = 1.7848$ $\qquad S_1(x) = 1.65 + 2.5(x-1.2)^2$

$S_2(x) = 1.75 + (x-1.4) - 3.25(x-1.4)^2$

c) $\int_{1.2}^{1.6} f(x)dx \approx 0.697$ $\qquad$ felet $\leq 0.4 \cdot 0.005 = 0.002$

4 a) $y' = xy - \cos y \qquad y(0) = 1$

$y_1 = 1 + 0{,}1(0.1 - \cos 1) = 0{,}9459...$

$y_2 = 0{,}89693... \approx y(0{,}2)$

b) $f(x) = 0{,}98x + 0{,}1\cos x + 0{,}1\cos 1 - 1$

$f'(x) = 0{,}98 - 0{,}1\sin x$

$\bar{x} = 0{,}9 \qquad |\bar{x} - x^*| \leq \dfrac{1.81 \cdot 10^{-3}}{0{,}9} \leq 0{,}0021$

N-R ger $x_1 \approx 0.902006...$

5. Om $|x| << 1$ fås kancellation vilket medför stort relativt fel i y. Skriv om som

$$y = \frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots - 1\right) = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots$$

om x är negativt blir varannan term negativ men dessa är av olika storlek.

(För stora negativa x ger dock avrundningen av varje term upphov till stora beräkningsfel)

6. a) $\dfrac{5{,}628 \cdot 10^{-5}}{1{,}407 \cdot 10^{-5}} = 4 = 2^p \Rightarrow p = 2$ stämmer med noggrannhetsordning 2 för $D_0 f(x)$.

b) Med mycket litet h kommer beräkningsfelen att dominera över trunkeringsfelet. Felet i de beräknade approximationerna kommer att minska men sedan öka igen då $h \to 0$.

7. $k \qquad$ felet $= x_k - x_6 = \varepsilon_k \qquad p = \dfrac{\ln(\varepsilon_{k+1}/\varepsilon_k)}{\ln(\varepsilon_k/\varepsilon_{k-1})}$

k	felet	
1	0,11117...	$p = 1.5$ (1–3)
2	0,01645...	
3	0,000934...	$p = 1.67$ (2–5)
4	$7{,}71 \cdot 10^{-6}$	
5	0	

Verkar ligga runt $p = 1.6$ (troligen sekantmetoden)

7 b) Det går bra att beräkna även dubbelrötter med Newton-Raphsons metod. Däremot tar det lite längre tid eftersom konvergensen bara är linjär.

8 a) $l_i = y_{i+1} - y(x_i+h) = y_i + h f(x_i,y_i) - \left(y(x_i) + h\cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2!} y''(x_i) + \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots \right) = \left\{ \begin{matrix} y_i = y(x_i) \\ f(x_i,y_i) = y'(x_i) \end{matrix} \right\}$

$- \frac{h^2}{2!} y''(x_i) - \frac{h^3}{3!} y'''(x_i) + \dots = O(h^2)$

b) studera testekv. $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$

$y_{i+1} = y_i + h\cdot\lambda y_i = (1+h\lambda) y_i$ ger

$y_n = (1+h\lambda)^n \cdot y_0$

$|1+h\lambda| \leq 1$ krävs, ger $0 < h \leq \frac{-2}{\lambda}$

c) ekvationerna blir

$$\begin{aligned} C_1 \cdot 1 &= f_1 \\ C_1 + C_2(X_2 - X_1) &= f_2 \quad \Leftrightarrow Ac = f \\ C_1 + C_2(X_3-X_1) + C_3(X_3-X_1)(X_3-X_2) &= f_3 \end{aligned}$$

Lösbart om $\det(A) \neq 0$

$\det(A) = 1\cdot(x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)\dots$

$x_2 \neq x_1$, $x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$ ... krävs, dvs alla x_i måste ha olika värden.

d) $x_{i+1} = g(x_i)$ $\quad x^* = g(x^*)$ gäller

MVS ger $g(x_i) - g(x^*) = g'(\xi)(x_i - x^*)$, $g'(\xi) \leq m$

$$|x_{i+1} - x^*| \leq m\,|x_i - x^*|$$

$$|x_n - x^*| \leq m^n\,|x_0 - x^*| \to 0 \text{ då } n \to \infty$$

om $m < 1$.

8e) $S(h) = \frac{h}{3}\left(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right)$

mult med 2 el. 4	:	$n-1$
mult. med h	:	1
add	:	n
div med 3	:	1
totalt		$2n+1$