Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TEN1
2015-10-26

Tentamen i TANA21 Beräkningsmatematik

Tid: $14^{00} - 18^{00}$. **Hjälpmedel**: Formelsamling (Brandén), miniräknare.

Redovisa beräkningar och motivera svar. Betygsgränser är 3 : 10p, 4 : 15p, 5 : 20p.

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) Hur många signifikanta siffror har närmevärdet då $a = 151.026 \pm 0.072$? (1p)

   (b) Föreslå en omskrivning av $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$ som undviker kancellation då $|x| \approx 0$. (1p)

   (c) Vilken noggrannhetsordning har en numerisk metod om $F(h) = \alpha + 3h^2 + 4h^6$ där $F(h) \to \alpha$ då $h \to 0$? (1p)

   (d) Beskriv Runges fenomen. (1p)

   (e) Bestäm en Gausstransformation M så att

$$M \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ -4 & 3 & 2 \\ 7 & -15 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

   för några a_{22}, a_{23}, a_{32} och a_{33}. (1p)

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. (a) Låt $x = 5606$ och $y = 3055$. Vad blir xy om beräkningarna utförs i ett flyttalssystem med bas 10, 3 decimaler och exponent mellan -9 och 9? Skriv svaret på normaliserad form. (1p)

   (b) Betrakta ekvationssystemet $Ax = b$ där

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & -2 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -2.5 & -1 \\ 1 & 0.5 & 0 \\ -12 & -8 & -3 \end{pmatrix} \text{ och } b = \begin{pmatrix} 24.76 \\ -37.38 \\ 32.11 \end{pmatrix}.$$

   Uppskatta $||\Delta x||_\infty / ||x||_\infty$ om elementen i b är korrekt avrundade. (1p)

3. Funktionsvärdena i följande tabell är korrekt avrundade.

x	0	0.25	0.5
$f(x)$	1.65	1.75	1.83

   (a) Avgör om

$$s(x) = \begin{cases} 1.65 + 0.42 \cdot x - 0.32 \cdot x^2, & 0 \le x \le 0.25 \\ 1.75 + 0.36(x-0.25) - 0.24(x-0.25)^2 + 0.32(x-0.25)^3, & 0.25 \le x \le 0.5 \end{cases}$$

   är en naturlig kubisk spline som interpolerar punkterna i tabellen. (1p)

   (b) Uppskatta $\int_0^{0.5} f(x)\,dx$ med Simpsons regel samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

   (c) Uppskatta $f''(0.25)$ samt det fel som beror på avrundning i funktionsvärdena. (1p)

4. Använd följande tabell i uppgifterna nedan.

x	8	9	11	12
$f(x)$	1.65	1.75	1.83	1.78

(a) Uppskatta $f(8.8)$ med hjälp av kvadratisk interpolation. (1p)

(b) Bestäm det andragradspolynom $p(x) = c_0 + c_1(x - 10) + c_2(x - 10)^2$ som bäst approximerar punkterna i minsta kvadratmening. (1p)

5. (a) Ekvationen $\sin x = x^4 - 1$ har en rot $x^* \approx 1.2$. Bestäm en approximation, $\bar{x}$, till roten med fel mindre än 10^{-5}. (Ska visas men strikt feluppskattning krävs ej.) (1p)

(b) Beräkna en approximation till $y(1)$ med Heuns metod och steglängd $h = 0.5$ då y löser $y'' = 2y - xy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$ (2p)

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. En viss integral har beräknats på dator med trapetsregeln för olika steglängder h. Beräknade värden, $T(h)$, samt den tid, t, i sekunder det tog att göra beräkningarna visas i tabellerna nedan.

h	0.1	0.05	0.025	0.0125
$T(h)$	78.36250	78.32689	78.31799	78.31576

h	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
t	0.005231	0.033309	0.276025	2.750903

(a) Är noggrannhetsordningen som förväntad? (1p)

(b) Verkar den aritmetiska komplexiteten vara som förväntad? (1p)

(c) Under vilken förutsättning skulle det löna sig att använda Simpsons metod istället för trapetsregeln? (1p)

7. (a) En viss tidsstegningsmetod för numerisk lösning av ordinära differentialekvationer har ett lokalt trunkeringsfel $O(h^4)$. Om h väljs så att metoden är stabil, vad bör det globala trunkeringsfelet bli? Motivera svaret! (1p)

(b) I vilka fall är det lämpligt att välja en implicit metod vid numerisk lösning av differentialekvationer? (1p)

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) Visa att $||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$ för inducerade normer. (1p)

(b) Låt L vara en undertriangulär matris av storlek $n \times n$. Visa att $Lx = b$ kan lösas med n^2 aritmetiska operationer. (1p)

(c) Visa att Newton-Raphsons metod konvergerar kvadratiskt för enkelrötter. (2p)

(d) Visa att trapetsmetoden är stabil för alla $h > 0$. (1p)

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Ingegerd Skoglund

Beräkningsmatematik
TANA21 / TANA22
2015-10-26

Svar/korta lösningar till tentamen i Beräkningsmatematik

Del A: Förklara och särskilja termer och begrepp

1. (a) 3 signifikanta siffror (ingen korrekt decimal).

   (b) $\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

   (c) Noggrannhetsordningen är 2.

   (d) Runges fenomen är stora oscillationer i ändarna av intervall som uppträder vid polynominterpolation av hög grad på ekvidistanta punkter.

   (e) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 1 & 0 \\ -0.7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Del B: Använda algoritmer och tekniker

2. (a) $5606 \cdot 3055 = 17126330$. Efter avrundning och på normaliserad form $1.713 \cdot 10^7$.

   (b)
$$\frac{||\Delta x||_\infty}{||x||_\infty} \leq ||A||_\infty \cdot ||A^{-1}||_\infty \cdot \frac{||\Delta b||_\infty}{||b||_\infty} \leq 9 \cdot 23 \cdot \frac{0.005}{37.38} \leq 0.028$$

3. (a) Kontrollera om
$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) = 1.65 + 0.42 \cdot x - 0.32 \cdot x^2, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ s_2(x) = 1.75 + 0.36(x-0.25) - 0.24(x-0.25)^2 + 0.32(x-0.25)^3, & 0.25 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$
går genom punkterna, har kont. $s'(x)$ och $s''(x)$ samt har $s''(0) = 0$ och $s''(0.5) = 0$.
$$s'(x) = \begin{cases} s_1'(x) = 0.42 - 2 \cdot 0.32x, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ s_2'(x) = 0.36 - 2 \cdot 0.24(x-0.25) + 3 \cdot 0.32(x-0.25)^2, & 0.25 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$
$$s''(x) = \begin{cases} s_1''(x) = -0.64, & 0 \leq x \leq 0.25 \\ s_2''(x) = -0.48 + 6 \cdot 0.32(x-0.25), & 0.25 \leq x \leq 0.5 \end{cases}$$
$s_1'(0.25) = 0.26$, $s_2'(0.25) = 0.36$
$s_1''(0.25) = -0.64$, $s_2''(0.25) = -0.48$
$s_1''(0) = -0.64$, $s_2''(0.5) = 0$
$s_1(0) = 1.65$, $s_1(0.25) = 1.735$, $s_2(0.25) = 1.75$, $s_2(0.5) = 1.83$
Den givna splinefunktionen går inte genom de givna punkterna och har inte heller kontinuerliga derivator. Det naturliga randvillkoret är bara uppfyllt i $x = 0.5$. Nej, detta är ingen kubisk spline.

   (b) $S(h) = \dfrac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) = \dfrac{0.25}{3}(1.65 + 4 \cdot 1.75 + 1.83) = 0.87333...$
$S = \dfrac{h}{3}(a + 4b + c)$, $\quad |\Delta S| \lesssim \dfrac{h}{3}(|\Delta a| + 4|\Delta b| + |\Delta c|) \leq \dfrac{0.25}{3}(0.005 + 4 \cdot 0.005 + 0.005) = 0.0025$

   (c) $f''(0.25) \approx D_+D_-f(0.25) = \dfrac{f(0) - 2f(0.25) + f(0.5)}{0.25^2} = -0.32$
$z = \dfrac{a - 2b + c}{h^2}$ ger $|\Delta z| \lesssim |\dfrac{\Delta a}{h^2}| + |\dfrac{2\Delta b}{h^2}| + |\dfrac{\Delta c}{h^2}| = 4\varepsilon/h^2 = 0.32$ då $h = 0.25$ och $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}$.

4. (a) Enligt Lagrange: $p(x) = 1.65\dfrac{(x-9)(x-11)}{(8-9)(8-11)} + 1.75\dfrac{(x-8)(x-11)}{(9-8)(9-11)} + 1.83\dfrac{(x-8)(x-9)}{(11-8)(11-9)}$
$p(8.8) = 1.7332$

   (b) Ansats $p(x) = c_0 + c_1(x-10) + c_2(x-10)^2$
Normalekvationerna blir $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.01 \\ 0.34 \\ 17.3 \end{pmatrix}$
$p(x) = 1.815 + 0.034(x-10) - 0.025(x-10)^2$

5. (a) Använd t.ex. Newton-Raphsons metod $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

   med $f(x) = \sin x - x^4 + 1$, $f'(x) = \cos x - 4x^3$ och $x_0 = 1.2$ erhålls

   $x_1 = 1.1783864\ldots \qquad x_2 = 1.1777041\ldots$

   Med $\bar{x} = 1.1777$ ger metodoberoende feluppskattning

   $|\bar{x} - x^*| = \dfrac{|f(\bar{x})|}{|f'(\xi)|} \approx \dfrac{|f(\bar{x})|}{|f'(\bar{x})|} \leq 4 \cdot 10^{-6}$ så $\bar{x}$ är tillräckligt noggrann.

   (b) Skriv om till system: Sätt t.ex. $\begin{cases} u = y \\ v = y' \end{cases}$ ger $\begin{cases} u' = v, & u(0) = 1, \\ v' = 2u - xv, & v(0) = 1. \end{cases}$

   Heuns metod ger $k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad k_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad y_1 = \begin{pmatrix} 1.75 \\ 2 \end{pmatrix}$

   $k_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2.5 \end{pmatrix} \quad k_2 = \begin{pmatrix} 3.25 \\ 2.25 \end{pmatrix} \quad y_2 = \begin{pmatrix} 3.0625 \\ 3.1875 \end{pmatrix}$

   så $y(1) \approx 3.0625$

Del C: Bedöma förutsättningar och resultat

6. (a) Ansätt $T(h) \approx c_0 + c_p h^p$. Formeln

$$\frac{T(4h) - T(2h)}{T(2h) - T(h)} \approx \frac{c_0 + c_p 4^p h^p - (c_0 + c_p 2^p h^p)}{c_0 + c_p 2^p h^p - (c_0 + c_p h^p)} = \frac{2^p(2^p - 1)}{(2^p - 1)} = 2^p$$

   ger $4.00\ldots$ för $h = 0.025$ och $3.99\ldots$ för $h = 0.0125$, vilket tyder på noggrannhetsordning är det förväntade $p = 2$.

   (b) Ansätt $t(h) \approx a_p h^{-p}$. Formeln

$$\frac{t(h)}{t(10h)} \approx \frac{a_p h^{-p}}{a_p 2^{-p} h^{-p}} = 10^p$$

   ger $6.32\ldots$ för $h = 10^{-4}$, $8.28\ldots$ för $h = 10^{-5}$ och $9.96\ldots$ för 10^{-6}, vilket tyder på att kvoten verkar gå mot 10 och ge det förväntade $p = 1$.

   (c) Högre ordningens metoder, som Simpsons metod, ger högre ordningens noggrannhet bara om integranden f är tillräckligt många gånger deriverbar. För en integrand som inte är så snäll finns det därmed ingen poäng med att använda en mer avancerad och därmed mer tidskrävande metod.

7. (a) Globala trunkeringsfelet är $O(h^3)$ eftersom lokalt trunkeringsfel $O(h^{p+1})$ ger ett globalt trunkeringsfel $O(h^p)$.

   (b) På grund av stabilitetsegenskaperna för en explicit metod kan det i vissa fall krävas mycket korta steglängder för att få korrekt lösning. Så är fallet t.ex. om ett system av differentialekvationer är styvt, dvs har en snabbt avklingande och en långsammare komponent i lösningen. En implicit metod har inget krav på steglängden för att fungera.

Del D: Härleda teoretiska samband

8. (a) $||A|| \cdot ||x|| = \sup\limits_{y \neq 0} \dfrac{||Ay||}{||y||} \cdot ||x|| \geq \dfrac{||Ax||}{||x||} \cdot ||x|| = ||Ax||$

   (b) Ett undertriangulärt ekvationssystem löses med framåtsubstitution, dvs

   beräkna $x_1 = \dfrac{b_1}{l_{1,1}}$: 1 beräkning

   beräkna $x_2 = \dfrac{b_2 - l_{2,1} \cdot x_1}{l_{2,2}}$: 3 beräkningar

   beräkna $x_3 = \dfrac{b_3 - l_{3,1} \cdot x_1 - l_{3,2} \cdot x_2}{l_{3,3}}$: 5 beräkningar

   $\vdots$

   beräkna $x_n = \dfrac{b_n - l_{n,1} \cdot x_1 - l_{n,2} \cdot x_2 - \cdots - l_{n,n-1} \cdot x_{n-1}}{l_{n,n}}$: $2n - 1$ beräkningar

   Totalt krävs $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \dfrac{1 + 2n - 1}{2} \cdot n = n^2$ aritmetiska operationer.

(c) Newton-Raphsons metod är en fixpunktiteration

$$x_{k+1} = g(x_k)$$

med $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Från en Taylorutveckling kring x^* följer att
$g(x_k) = g(x^*) + (x_k - x^*)g'(x^*) + \frac{(x_k - x^*)^2}{2} g''(\xi)$ för något ξ mellan x_k och x^*.
Om x^* är en enkelrot är $f'(x^*) \neq 0$ och

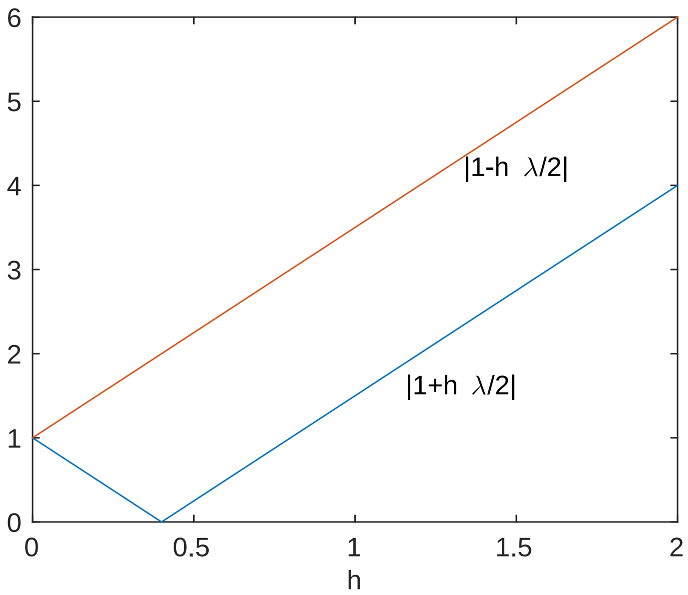
$$g'(x^*) = 1 - \frac{f'(x^*)f'(x^*) - f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = \frac{f(x^*)f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0.$$

Så $g(x_k) - g(x^*) = \frac{(x_k - x^*)^2}{2} g''(\xi)$ och eftersom $x_{k+1} = g(x_k)$ och $g(x^*) = x^*$ får vi (om f är tillräckligt snäll) att det finns en konstant C så att

$$|x_{k+1} - x^*| \leq C|x_k - x^*|^2$$

och konvergensen är kvadratisk.

(d) Trapetsmetoden på testekvationen $y' = \lambda y$ ($\lambda < 0$) blir $y_{i+1} = \left(\frac{1 + h\lambda/2}{1 - h\lambda/2}\right) y_i$
Villkoret blir att $|1 + h\lambda/2| \leq |1 - h\lambda/2|$ krävs för stabilitet.



Figuren ger att villkoret är uppfyllt för alla $h > 0$.