Kurskod: TAMS79 Probability Theory
Provkod: TEN1 12 January 2021, 14:00-18:00

Examiner: Zhenxia Liu (Tel: 013 281455).

a. You are allowed to use a calculator with cleared memory, Formel -och tabellsamling i matematisk statistik edited by MAI.

b. Scores rating: 8-11 points giving rate 3; 11.5-14.5 points giving rate 4; 15-18 points giving rate 5.

English Version

1 (3 points)

Johanna and Oscar have nine fishes of which three are poisonous. Johanna eats three randomly selected fishes and Johan eats five. The cat gets the rest. Calculate
(1.1). (1p) the probability that the cat will survive.
(1.2). (1p) the conditional probability that both Johanna and Oscar will be poisoned if the cat survives.
(1.3). (1p) the probability that both Johanna and Oscar will be poisoned but the cat will survive.

2 (3 points)

The lifetime (in hours) of a certain type of radio tubes is assumed to be a continuous random variable X with a probability density function

$$f(x) = \frac{3000}{x^4}, \quad \text{if } x > 10.$$

(2.1). (1p) Find the mean $\mu = E(X)$ and the variance $\sigma^2 = V(X)$.
(2.2). (2p) If there are 100 such independent radio tubes, what is the probability that the total lifetime of these 100 radio tubes is more than 1600 hours?

3 (3 points)

An urn contains three black and two white balls. One randomly selects three balls from the urn with replacement. Let X be the number of white balls among the selected balls.
(3.1). (1p) Determine the probability mass function for X.
(3.2). (1p) Calculate $P(1 < X < 4)$.
(3.3). (1p) Calculate the expectation $E(X)$ and the standard deviation $\sigma = D(X)$.

4 (3 points)

Let (X, Y) be a two dimensional random variable with the probability density function

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & \text{if } 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2. \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(4.1). (1p) Calculate $f_X(x)$ and $f_Y(y)$.
(4.2). (1p) Calculate $P(Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$.
(4.3). (1p) Calculate $P(X + Y < 1)$.

5 (3 points)

At Gotland, the number of sunshine hours during a summer week can be assumed as normally distributed with expectation 40 and standard deviation 15. During four weeks in July, family A will spend the first three weeks and family B will spend the last two weeks at Gotland . What is the probability that family A will have at least twice as much sunshine hours as the family B under the assumption that the sunshine hours are independent during different weeks.

6 (3 points)

The number of calls that occur during a year at 1177 can be considered as a Poisson process $\{N(t), t \geq 0\}$ with the intensity 109 calls per year. Note: 1 year = 52 weeks.
(6.1). (1.5p) Calculate the probability that at least four calls occur during a week.
(6.2). (1.5p) Let $\{X(t), t \geq 0\}$ be a Poisson process with the intensity λ. Calculate

$$P\left(X(3) = 7 | X(2) = 4, X(6) = 11\right).$$

Svensk version

1 (3 poäng)

Johanna och Oscar har nio fiskar av vilka tre är giftiga. Johanna äter tre på måfå valda fiskar och Johan fem. Katten får den återstående. Beräkna
(1.1). (1p) sannolikheten att katten klarar sig.
(1.2). (1p) den betingade sannolikheten att både Johanna och Oscar blir förgiftade om katten klarar sig.
(1.3). (1p) sannolikheten att både Johanna och Oscar blir förgiftade men katten klarar sig.

2 (3 poäng)

Livslängden (i timmar) hos en viss typ av radiorör antas vara en kontinuerlig stokastisk variabel X med täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{3000}{x^4}, \quad \text{om } x > 10.$$

(2.1). (1p) Beräkna väntevärdet $\mu = E(X)$ och variansen $\sigma^2 = V(X)$.
(2.2). (2p) Om det finns 100 sådana oberoende radiorör, vad är sannolikheten att den totala livslängden av dessa 100 radiorör är mer än 1600 timmar ?

3 (3 poäng)

En urna innehåller tre svarta och två vita kulor. Man drar tre kulor ur urnan med återläggning. Låt X vara antalet vita kulor bland de dragna kulorna.
(3.1). (1p) Ange sannolikhetsfunktionen för X.
(3.2). (1p) Beräkna $P(1 < X < 4)$.
(3.3). (1p) Beräkna väntevärdet $E(X)$ och standardavvikelsen $\sigma = D(X)$.

4 (3 poäng)

Låt (X, Y) vara en tvådimensionall stokastisk variabel med täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} x^2 + \frac{xy}{3}, & \text{if } 0 < x < 1, 0 < y < 2. \\ 0, & \text{annars} \end{cases}$$

(4.1). (1p) Beräkna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$.
(4.2). (1p) Beräkna $P(Y < \frac{1}{2} | X < \frac{1}{2})$.
(4.3). (1p) Beräkna $P(X + Y < 1)$.

5 (3 poäng)

På Gotland kan antalet soltimmar under en sommarvecka antas vara en normalfördelad med väntevärde 40 och standardavvikelse 15. Under fyra veckor i juli tillbringar familj A de första tre veckorna och familj B kommer att tillbringa de senaste två veckorna På Gotland. Vad är sannolikheten för att familj A kommer att ha minst dubbelt så mycket solskenstimmar som familjen B under antagandet att solskenstimmarna är oberoende under olika veckor.

6 (3 poäng)

Antalet samtal som inträffar under ett år på 1177 kan antas som en Poisson process $\{N(t), t \geq 0\}$ med intensitet 109 samtal per år. Obs: 1 år = 52 veckor.
(6.1). (1.5p) Beräkna sannolikheten för att minst fyra samtal inträffar under en vecka.
(6.2). (1.5p) Låt $\{X(t), t \geq 0\}$ vara en Poisson process med intensitet λ. Beräkna

$$P\left(X(3) = 7 | X(2) = 4, X(6) = 11\right).$$