LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 79 / TEN 1

04 april 2018, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

(1) Antag att vi har en tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) med simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y} & \text{om } 0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty \\ 0 & \text{annars} \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestäm $P(X > 1, Y < 1)$. (1p)

(b) Bestäm $P(X < Y)$. (1.5p)

(c) Bestäm $P(X < a)$ om $a > 0$. (0.5p)

(2) En viss komponent i en maskin går sönder rätt ofta, och därför säljer man kartonger med 144 stycken komponenter av detta slag. Komponenternas livslängder är oberoende och exponentialfördelade med väntevärde 1 timme. Det finns en garanti som säger att om någon av de 144 komponenterna i en kartong går sönder inom en halv minut, så slipper man betala för nästa kartong man köper.

Vår maskin är i drift dygnet runt, och så snart en komponent går sönder sätter vi in en ny. När alla komponenter är förbrukade köper vi en ny kartong. Antag att vi just har öppnat en ny kartong och satt i den första komponenten.

(a) Vad är sannolikheten att vi slipper betala för nästa kartong? (1p)

(b) Vad är sannolikheten att det dröjer mer än en vecka innan vi börjar på nästa kartong? Använd centrala gränsvärdessatsen. (2p)

Anmärkning: (b)-delen lösas oberoende av resultatet i (a).

(3) För en poissonprocess med intensitet λ beräkna sannolikheten att

(a) den $(k+1)$:a händelsen inträffar efter tid $t+s$, givet att precis k händelser har inträffat vid tid t, (1p)

(b) precis två händelser inträffar inom intervallet $(t, t+s]$, givet att precis k händelser har inträffat vid tid t. (2p)

(4) Man har ett mycket stort parti tabletter. Vikten (enhet: gram) av en slumpmässigt vald tablett kan med god noggrannhet anses vara en normalfördelad stokastisk variabel X med väntevärdet μ och standardavvikelsen 0.02. För kontroll av vikten tar man ut ett antal tabletter och väger dem. Antag att $\mu = 0.65$.

(a) Beräkna sannolikheten att vikten av en slumpmässigt vald tablett ligger utanför intervallet $(0.60\,,\,0.70)$. (1p)

(b) Beräkna sannolikheten att aritmetiska medelvärdet $\bar{X}$ av vikterna av 30 slumpmässigt valda tabletter ligger utanför intervallet $(0.64\,,\,0.66)$. (1p)

(c) Hur många tabletter bör man väga, om man vill att sannolikheten skall vara hgst 0.01, att man får ett $\bar{X}$ som ligger utanför intervallet $(0.64\,,\,0.66)$? (1p)

(5) Låt X vara en $U(0,1)$-fördelade stokastisk variabel.

(a) Bestäm $E[e^X]$. (0.5p)

(b) Bestäm $Var(e^X)$. (1.5p)

(b) Bestäm fördelningsfunktionen F_Y av variablen $Y = e^X$. (1p)

(6) Tre mätinstrument, numrerade 1, 2, 3, fungerar med sannolikheterna 0.9, 0.8 respektive 0.4. Man väljer slumpmässigt ut ett instrument.

(a) Hur stor är sannolikheten att det valda instrumentet fungerar? (1p)

(b) Antag att det instrument man valt visar sig fungera. Beräkna för $k = 1, 2, 3$ den betingade sannolikheten att man har valt instrument nr. k. (2p)

Lösningar

(1) (a)

$$
\begin{aligned}
P(X>1, Y<1) &= \int_{y=0}^{1}\int_{x=1}^{\infty} 2e^{-x-2y}\,dx\,dy \\
&= \int_{x=1}^{\infty} e^{-x}\,dx \cdot \int_{y=0}^{1} 2e^{-2y}\,dy \\
&= e^{-1}\cdot(1-e^{-2}) = e^{-1}-e^{-3}\,.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
P(X<Y) &= \int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{y} 2e^{-x-2y}\,dx\,dy \\
&= \int_{y=0}^{\infty} 2e^{-2y}\left(\int_{x=0}^{y} e^{-x}\,dx\right)\,dy \\
&= \int_{y=0}^{\infty} 2e^{-2y}\left(1-e^{-y}\right)\,dy = \ldots = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}
$$

(c)

$$
f_X(x) = \begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}
$$

$$
P(X<a) = \int_{x=-\infty}^{a} f_X(x)\,dx = \int_{x=0}^{a} e^{-x}\,dx = 1-e^{-a}\,.
$$

(2) (a) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_{144}$ beteckna komponenternas livslängder i timmar.

$$
\begin{aligned}
P\,(\text{slippa betala}) &= 1-P(\text{vara tvungen att betala}) \\
&= 1-P\left(X_1>\frac{1}{120}, X_2>\frac{1}{120},\ \ldots,\ X_{144}>\frac{1}{120}\right) \\
&= 1-P\left(X_1>\frac{1}{120}\right)P\left(X_2>\frac{1}{120}\right)\cdots P\left(X_{144}>\frac{1}{120}\right) \\
&= 1-\left(e^{-\frac{1}{120}}\right)^{144}\,.
\end{aligned}
$$

Alltså, $P(\text{slippa betala})\approx 0.6988$.

(b) Eftersom $E[X_i]=1$ vet vi att $X_i\sim Exp(1)$, som också medför att $Var(X_i)=1$. Låt $Y=\sum_{i=1}^{144}X_i$. Vi använder oss av den centrala gränsvärdessatsen. Vi söker $P(\text{det dröjer mer än 1 vecka innan vi börjar på nästa kartong})= P(Y>7\cdot 24)$. Det gäller att

$$
\begin{aligned}
P(Y>7\cdot 24) &= P\left(\frac{Y-144}{\sqrt{144}} > \frac{7\cdot 24-144}{\sqrt{144}}\right) \\
&= 1-P\left(\frac{Y-144}{\sqrt{144}}<2\right) \approx 1-\Phi(2)\approx 0.0228\,.
\end{aligned}
$$

(3) (a) Låt $S(t)$ beteckna tiden som gått efter t, tills den nästa händelsen inträffar. Då är $S(t) \sim Exp(\lambda)$. Alltså är

$$P(S(t) > s) = 1 - F_{S(t)}(s) = e^{-s\lambda}\,.$$

(b)

$$P(N(t+s) - N(t) = 2 | N(t) = k) = \frac{P(N(t+s) - N(t) = 2, N(t) = k)}{P(N(t) = k)}$$
$$= \frac{P(N(t+s) - N(t) = 2) \cdot P(N(t) = k)}{P(N(t) = k)}$$
$$= P(N(t+s) - N(t) = 2) = P(N(s) = 2) = \frac{(\lambda s)^2}{2}\, e^{-\lambda s}\,.$$

(4) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.19.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(5) Vi använder formeln $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f(x)\, dx$ såväl i (a)-delen som i (b)-delen.

(a)

$$E[e^X] = \int_0^1 e^x \cdot 1\, dx = e - 1\,.$$

(b)

$$Var(e^X) = E[e^{2X}] - (E[e^X])^2 = \int_0^1 e^{2x} \cdot 1\, dx - (e-1)^2$$
$$= \frac{1}{2}(e^2 - 1) - (e-1)^2 = -\frac{1}{2}e^2 + 2e - \frac{3}{2}\,.$$

(c) Vi påminner oss om

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}\,.$$

Vi får $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \ln y) = F_X(\ln y) = \ln y$ om $0 < \ln y < 1$. Detta ger

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ \ln y & 1 < y < e \\ 1 & e \leq y \end{cases}\,.$$

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 2.23.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`