LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 79 / TEN 1

12 januari 2018, klockan 14.00-18.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

(1) Låt X_1, X_2 vara oberoende $N(0,1)$-fördelade stokastiska variabler och låt $\alpha \in [0, 2\pi)$. Låt den stokastiska vektorn $\mathbf{Y}$ defineras genom

$$\mathbf{Y} \equiv \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestäm väntevärdesvektorn och kovariansmatrisen för $\mathbf{Y}$. (2p)

Ledning: Använd $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

(b) Ange fördelningen av $Y_1 + Y_2$ (namnet av fördelningen och parametrarna). (1p)

(2) Ett företag som tillverkar batterier av en viss typ har tillverkningen förlagd till tre olika fabriker. Fabrik A står för 50 % av tillverkningen, fabrik B för 20 % och fabrik C för 30 %. Man vet att ett batteri från fabrik A har sannolikheten 95 % att räcka mer än 10 drifttimmar. Motsvarande sannolikheter för fabrikerna B och C är 97 % resp. 98 %. Man har blandat batterier från de tre fabrikerna i ett stort centralt lager.

(a) Vad är sannolikheten att ett batteri som tas på måfå ur lagret ska räcka mer än 10 drifttimmar? (1p)

(b) Man tar på måfå ett batteri ur lagret och finner att det räcker mer än 10 drifttimmar. Vad är sannolikheten för att det tillverkats i fabrik A? (1p)

(c) Man tar på måfå ett batteri ur lagret och finner att det räcker mindre än 10 drifttimmar. Vad är sannolikheten för att det tillverkats i fabrik A? (1p)

(3) Lastbilar passerar över en bro till synes slumpvis över tiden. Vi vet av lång erfarenhet att det i genomsnitt passerar 0.3 lastbilar per minut. Då kan det vara rimligt att beskriva trafiken med en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 0.3$.

(a) Bestäm sannolikheten att på en viss måndag precis 10 lastbilar passerar bron mellan kl. 12.00 och kl. 12.30. (1p)

(b) Bestäm sannolikheten att på en viss torsdag högst 10 lastbilar passerar bron mellan kl. 12.30 och kl. 13.00. (1p)

(c) På en viss fredag börjar vi observera trafiken på bron precis kl. 13.00. Bestäm den förväntade väntetiden tills den första lastbilen passerar bron. (1p)

(4) Individerna i en viss population har en vikt (i kg) som är normalfördelad med väntevärde 75 och standardavvikelse 5.5.

(a) Vad är sannolikheten att en slumpvis vald individ ur populationen väger mer än $82kg$? (1p)

(b) Vad är sannolikheten att minst två av tio slumpvis valda individer ur populationen väger mer än $82kg$? (1p)

(c) Vad är sannolikheten att summan av vikten för två slumpvis valda individer överstiger $164kg$? De två individerna väljs oberoende av varandra. (1p)

(5) (a) Låt X och Y vara oberoende $U(a, b)$-fördelade stokastiska variabler. Ange den simultana (gemensamma) täthetsfunktionen $f(x, y)$ av X och Y. (1p)

(b) Två personer kommer överens om att träffas på en viss plats en dag mellan kl 12:00 och 13:00 och vänta i högst 20 minuter på varandra. Om båda anländer oberoende av varandra vid slumpmässigt valda tidpunkter under timmen, hur stor är sannolikheten att de träffas? (2p)

(6) Livslängden för en viss typ av elektronrör är exponentialfördelad med väntevärde 200. Ett sådant rör ingår i en radarutrustning som ständigt är i bruk på ett fartyg. När ett elektronrör går sönder byts det genast ut mot ett nytt. Man har 50 sådana elektronrör i lager på fartyget. Livslängden för olika rör för förutsätts vara oberoende. Beräkna en tid t sådan att lagret räcker åtminstone denna tid med sannolikheten 0.9. (3p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

Lösningar

(1) (a) Låt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Det gäller att $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$. Det medför att

$$\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{aligned} \mathbf{C_Y} &= \mathbf{AC_XA}^T = \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Som linjärkombination av normalfördelade stokastiska variabler är Y_1+Y_2 också normalfördelad.

$$\begin{aligned} &E[Y_1 + Y_2] = E[Y_1] + E[Y_2] = 0 \\ &V(Y_1 + Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) + 2Cov(Y_1, Y_2) = 1 + 1 + 2 \cdot 0 = 2\,, \end{aligned}$$

dvs.

$$Y_1 + Y_2 \sim N(0, \sqrt{2})\,.$$

(2) Låt A, B och C beteckna händelserna att ett på måfå valt batteri kommer från fabrik A, B eller C. Vidare, låt R beteckna händelsen att valt batteri räcker mer än 10 drifttimmar.

(a) Total sannolikhet:

$$\begin{aligned} P(R) &= P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) + P(R|C) \cdot P(C) \\ &= 0.95 \cdot 0.5 + 0.97 \cdot 0.2 + 0.98 \cdot 0.3 = 0.963\,. \end{aligned}$$

(b) Definition betingad sannolikhet:

$$P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0.475}{0.963} = 0.49325\,.$$

(c) Bayes' formel:

$$P(A|R^c) = \frac{P(R^c|A) \cdot P(A)}{P(R^c)} = \frac{P(R^c|A) \cdot P(A)}{1 - P(R)} = \frac{0.05 \cdot 0.5}{0.037} = 0.6757\,.$$

(3) (a) Låt $N(30)$ vara antalet lastbilar som passerar bron kl. 12.00-12.30 en viss måndag. Vi har att $N(30) \sim Po(0.3 \cdot 30)$ och sannolikheten att exakt 10 lastbilar passerar är

$$P(N(30) = 10) = \frac{(0.3 \cdot 30)^{10}}{10!} \cdot e^{-0.3 \cdot 30} = \frac{9^{10}}{10!} \cdot e^{-9} \approx 0.119.$$

(b) Låt $N'(30)$ vara antalet lastbilar som passerar bron kl. 12.30-13.00 en viss torsdag. Vi har att $N'(30) \sim Po(0.3 \cdot 30)$. Tabellen ger $P(N'(30) \leq 10) = 0.70599$.

(c) På en viss fredag börjar vi observera trafiken på bron precis kl. 13.00. Väntetiden T_1 tills den första lastbilen passerar bron är $Exp(\lambda)$-fördelad. Den förväntade väntetiden är alltså

$$E[T_1] = \frac{1}{\lambda} = 10/3 \text{ min} = 3 \text{ min} : 20 \ \text{ sec.}$$

(4) (a) Låt slumpvariablen X beskriva vikten för slumpvis vald individ ur populationen. Det gäller att

$$\begin{aligned} P(X > 82) &= P\left(\frac{X-75}{5.5} > \frac{82-75}{5.5}\right) \\ &= P(Z > 1.27) = 1 - P(Z \leq 1.27) = 0.1016 \approx 0.1 \end{aligned}$$

där Z betecknar en standardnormalfördelad stokastisk variabel.

(b) Låt slumpvariablen Y beskriva antalet individer av tio som väger mer än $82kg$. Då är $Y \sim Bin(10, 0.1)$. Det gäller att

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 1) = 1 - 0.7361 = 0.2639\,.$$

(c) Låt slumpvariablen W beskriva summan av de två individernas vikter. Då är W normalfördelad med väntevärde $E[W] = 75 + 75 = 150$ och standardavvikelse $D(W) = \sqrt{5.5^2 + 5.5^2} = 7.78$. Således

$$\begin{aligned} P(W > 164) &= P\left(\frac{W-150}{7.78} > \frac{164-150}{7.78}\right) \\ &= P(Z > 1.80) = 1 - P(Z \leq 1.80) = 0.0359\,. \end{aligned}$$

(5) (a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^2} & \text{om} \quad a < x < b \quad \text{och} \quad a < y < b \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

(b) Se lösningar till lektionsuppgifter, 4.8.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.23.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`