

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 79 / TEN 1

24 augusti 2017, klockan 8.00-12.00

Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

- (1) Låt den kontinuerliga tvådimensionella slumpvariabeln (X, Y) ha täthetsfunktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}.$$

- (a) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. (1p)
- (b) Bestäm väntevärdena $E[X]$ och $E[Y]$. (1p)
- (c) Beräkna kovariansen mellan X och Y , $Cov(X, Y)$. (1p)
- (2) Livslängden hos en viss typ av elektroniska komponent modelleras med hjälp av en slumpvariabel X med väntevärde $E[X] = 5$ dygn och varians σ^2 . Livslängden hos olika komponenter antas vara oberoende.
- (a) Beräkna sannolikheten att den sammanlagda livslängden hos 30 komponenter ligger mellan 120 och 180 dygn om $\sigma = 4.5$. Använd centrala gränsvärdesatsen. (1.5p)
- (b) Man vill garantera att sannolikheten att den sammanlagda livslängden hos 30 komponenter ligger mellan 120 och 180 dygn är minst 0.9. Vad är det största värdet på σ som gör att detta uppfylls? (1.5p)
- (3) I en fabrik tillverkas 25% av enheterna vid maskin 1, 35% vid maskin 2 och 40% vid maskin 3. Av produktionen är respektive 1%, 2% och 3% defekt. Man blandar enheterna och sänder dem till kunderna.
- (a) Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet är felaktig? (1p)
- (b) Antag att en kund påträffar en felaktig enhet. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 1. (2p)
- (4) En dartspelare försöker träffa *Bull's eye* (innerste lilla cirkeln i piltavlan). Antag att hon träffar *Bull's eye* med sannolikhet 0.1 i varje enskild kast och att kasten sker oberoende. Låt X vara antalet kast som krävs tills hon träffar *Bull's eye* inklusive det lyckade kastet.
- (a) Bestäm sannolikhetsfunktionen av X . (1p)
- (b) Låt j och k vara strikt positiva heltal. Beräkna $P(X > k + j | X > j)$. (2p)
- (5) Antalet grammofonspelare som säljs hos handlare Alex beskrivs av en Poissonprocess med intensitet 0.3 enheter per dag. Den flitige Alex har öppet 7 dagar i veckan och vid söndag kväll ringer han in beställning hos leverantören för nya produkter som dyker upp måndag morgon.

- (a) Beräkna sannolikheten att minst en grammofonspelare säljs under en dag. (1.5p)
- (b) Beräkna sannolikheten att inga grammofoner säljs på en hel vecka. (1.5p)
- (6) Låt X och Y vara oberoende och respektive $N(150, 3)$ och $N(100, 4)$.
- (a) Ange fördelningarna för $X + Y$, $X - Y$ och $(X + Y)/2$. (1p)
- (b) Beräkna sannolikheten att $X + Y < 242.6$, sannolikheten att $|X - Y| < 40$ samt sannolikheten att $|\frac{X+Y}{2} - 125| > 5$. (2p)

Lösningar

(1) (a)

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{\infty} (x + y) dy = x + \frac{1}{2} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Annars $f_X(x) = 0$. På samma sätt fås $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$, $0 \leq y \leq 1$. Annars $f_Y(y) = 0$.

(b) Det gäller att

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12}.$$

På samma sätt fås $E[Y] = \frac{7}{12}$.

(c) Det gäller att $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ och

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy \cdot (x + y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \left[\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Således $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{3} - \frac{7^2}{12^2} = -\frac{1}{144} \approx -0.0069$.

(2) Låt X_1, X_2, \dots, X_{30} beteckna komponenternas livslängder i dygn. Vi har då att X_1, X_2, \dots, X_{30} är oberoende och likafördelade med $E[X_i] = 5$ dygn och $Var(X_i) = \sigma^2$. Låt Y vara den sammanlagda livslängden för 30 komponenter, dvs. $Y = X_1 + \dots + X_{30}$.

(a) Eftersom Y är en summa av 30 st oberoende likafördelade stokastiska variabler kan vi använda oss av centrala gränsvärdeessatsen för att beräkna sannolikheten att $120 \leq Y \leq 180$ enligt

$$\begin{aligned} P(120 \leq Y \leq 180) &= P\left(\frac{120 - 30 \cdot 5}{\sigma\sqrt{30}} \leq \frac{Y - 30 \cdot 5}{\sigma\sqrt{30}} \leq \frac{180 - 30 \cdot 5}{\sigma\sqrt{30}}\right) \\ &\approx P\left(\frac{-\sqrt{30}}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\sqrt{30}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Här har vi $Z \sim N(0, 1)$ vilket tillsammans med $\sigma = 4.5$ och symmetriargument ger att

$$P(120 \leq Y \leq 180) \approx 2P\left(Y \leq \frac{\sqrt{30}}{\sigma}\right) - 1 = 2\Phi(1.22) - 1 = 0.78.$$

(b) För att bestämma σ så att $P(120 \leq Y \leq 180) \geq 0.9$ använder vi oss av att enligt centrala gränsvärdeessatsen

$$0.9 \leq P(120 \leq Y \leq 180) \approx 2\Phi\left(\frac{\sqrt{30}}{\sigma}\right) - 1.$$

Vi får $\frac{\sqrt{30}}{\sigma} \geq 1.645$ och således $\sigma \leq 3.33$.

- (3) (a) Låt A beteckna händelsen {enhet är felaktig}. Enligt lagen om "total sannolikhet" gäller det att

$$P(A) = 0.25 \cdot 0.01 + 0.35 \cdot 0.02 + 0.40 \cdot 0.03 = 0.0215.$$

- (b) Låt H_i beteckna händelsen {enhet har tillverkats vid maskin i }, $i = 1, 2, 3$. Bayes' formel medför att

$$P(H_1|A) = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.25 \cdot 0.01 + 0.35 \cdot 0.02 + 0.40 \cdot 0.03} = 0.116.$$

- (4) (a) $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \dots$

- (b) X är större än i om och endast om de första i kasten har misslyckats. Således är $P(X > i) = 0.9^i$. Vi får

$$\begin{aligned} P(X > j + k | X > j) &= \frac{P(X > j + k, X > j)}{P(X > j)} \\ &= \frac{P(X > j + k)}{P(X > j)} \\ &= \frac{0.9^{j+k}}{0.9^j} = 0.9^k \\ &= P(X > k). \end{aligned}$$

- (5) (a) Om X är antalet förfrågningar under en dag, så är $X \sim Po(0.3)$. Då gäller att

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0.3} \approx 0.26.$$

- (b) Om Y är antalet förfrågningar på en vecka gäller att $Y \sim Po(7 \cdot 0.3) = Po(2.1)$. Således är $P(Y = 0) = e^{-2.1} \approx 0.12$.

- (6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.16.

<http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf>