# LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

# EXAM TAMS 79 / TEN 1

19 april 2017, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistisk utgiven av MAI, och ett ytterligare formel-blad (framsida och baksida).

(1) Vikten $X$ (i $kg$) på en enskild melon är normalfördelad med väntevärde $1.2\,kg$ och standardavvikelse $0.3\,kg$. Vikten $Y$ på en enskild ananas är normalfördelad med väntevärde $0.6\,kg$ och standardavvikelse $0.2\,kg$. Antag att man väljer en melon och en ananas slumpmässigt och oberoende och köper dem.

- (a) Vilken fördelning har den sammanlagda vikten? (0.5p)
- (b) Beräkna sannolikheten att den sammanlagda vikten *inte* överstiga $2.0\,kg$. (1p)
- (c) Antag att melonen koster $20\,kr/kg$ och ananasen koste $40kr\,/kg$. Uttryck priset $Z$ på köpet i termer av $X$ och $Y$ samt ange dess fördelning. (0.5p)
- (d) Beräkna sannolikheten att priset $Z$ blir mer än $40\,kr$. (1p)

(2) Låt $U_1, U_2, \ldots,$ vara oberoende stokastiska variabler som alla är $U(0,1)$-fördelade, dvs. kontinuerligt likformigt fördelade på intervallet $(0,1)$. Låt $g(u) = \sqrt{u}$ och definiera $X_i = g(U_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

- (a) Bestäm fördelningsfunktion och täthetsfunktion för $X_i$, dvs. $F_{X_i}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, och $f_{X_i}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (1p)
- (b) Beräkna $E[X_i]$ och $Var(X_i)$. (0.5p)
- (c) Låt
$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i.$$
Vilken fördelning har $Y$ approximativt? (0.5p)
- (d) Beräkna $P(Y > 60)$ approximativt. (1p)

(3) Per och Pål har elva frukter av vilka tre är giftiga. Per äter fyra på måfå valda frukter och Pål sex; hunden får den återstående. Beräkna

- (a) sannolikheten att hunden klarar sig, (0.5p)
- (b) den betingade sannolikheten att både Per och Pål blir förgiftade om hunden klarar sig, (1.5p)
- (c) sannolikheten att både Per och Pål blir förgiftade och hunden klarar sig. (1p)

(4) Åtta torn placeras slumpvis på var sin ruta i ett schackbräde. Beräkna sannolikheten att inget av tornen kan slå det andra, med andra ord, att det hamnar precis ett torn i varje lodrät och vågrät rad på brädet. Ett schackbräde består av $8 \times 8$ rutor. (3p)

(5) Antalet partiklar $X$ som inkommer under en timme till en partikelräknare är Poissonfördelad med parameter $\mu$. Varje partikel har sannolikheten $p$ att registreras, och detta sker helt oberoende av övriga partiklar. Låt $Y$ vara antalet registrerade partiklar.

(a) Bestäm $P(Y = k|X = n)$, $k, n = 0, 1, 2, \ldots$. (1p)

(b) Bestäm $P(Y = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. (2p)

(6) Två personer $A$ och $B$ har stämt möte på ett kafé ”litet efter klockan åtta”. $A$ anländer $X$ minuter efter åtta och $B$ anländer $Y$ minuter efter åtta. Anta nu att $X$ är $U(0, 4)$-fördelad och $Y$ är $U(0, 6)$-fördelad (enhet är minuter). $X$ och $Y$ antas vara oberoende.

(a) Bestäm den simultana täthetsfunktionen av $(X, Y)$. (1p)

(b) Vad är sannolikheten att $A$ får vänta på $B$, dvs. vad är $P(X < Y)$? (2p)

# Lösningar

(1) (a) $X + Y$ är normalfördelad med väntevärde $E[X] + E[Y] = 1.8$ och varians $Var(X) + Var(Y) = 0.3^2 + 0.2^2 = 0.13$.
(b)

$$P(X + Y \leq 2.0) = \Phi\left(\frac{2.0 - 1.8}{\sqrt{0.13}}\right) = \Phi(0.55) = 0.71$$

(c) $Z = 20X + 40Y$. Priset är en linjärkombination av normalfördelade slumpvariabler och således normalfördelat. Väntevärdet är $E[Z] = 20E[X] + 40E[Y] = 48$ och variansen blir $20^2\,Var(X) + 40^2\,Var(Y) = 100$.
(d)

$$P(Z > 40) = 1 - P(Z \leq 40) = 1 - \Phi\left(\frac{40 - 48}{\sqrt{100}}\right) = 1 - \Phi(-0.8) = \Phi(0.8) = 0.7881.$$

(2) (a) Låt $x \in (0, 1)$. Då gäller att

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\sqrt{U} \leq x) = P(U \leq x^2) = F_U(x^2) = x^2.$$

Dessutom gäller $F_X(x) = 0$ för $x \leq 0$ och $F_X(x) = 1$ för $x \geq 1$. Tätheten fås genom derivering: $f_X(x) = d/dxF_X(x) = 2x$ för $x \in (0, 1)$ och $f_X(x) = 0$ för $x \in \mathbb{R} \setminus (0, 1)$.
(b) $E[X] = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = 2/3$, $E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = 1/2$. Från detta får man $Var(X) = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18$.
(c) Enligt centrala gränsvärdessatsen så är $Y$ approximativt normalfördelad med väntevärde $nE(X) = 200/3 = 66.67$ och standardavvikelse $\sqrt{n\,Var(X)} = 2.36$.
(d) Normalapproximation ger

$$\begin{aligned} P(Y > 60) &= 1 - P(Y \leq 60) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{60 - 66.67}{2.36}\right) = 1 - \Phi(-2.83) = \Phi(2.83) = 0.9977\,, \end{aligned}$$

där den sista (approximativa) likheten fås från tabell.

(3) Se 2.24 i `http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(4) Antalet sätt att placera ut 8 torn på schackbrädets 64 rutor är

$$\binom{64}{8} = \frac{64!}{8! \cdot 56!}\,.$$

Antalet sätt att placera ut tornen så att exakt ett hamnar i varje vågrät och lodrät rad är 8!. Den sökta sannolikheten är alltså $(8!)^2 \cdot 56!/64!$, som är ungefär 9 på en miljon.

(5) Se lösningar till lektionsuppgifter, 4.28.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 4.7.