LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 79 / TEN 1

10 januari 2017, kl. 14.00-18.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistisk utgiven av MAI, och ett ytterligare formel-blad (framsida och baksida).

(1) Låt $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ vara oberoende stokastiska variabler, alla med samma fördelning given av $P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/3$.

(a) Bestäm väntevärdet och variansen för X_1. (1.5p)

(b) Låt $Y = X_1 + \dots + X_{100}$. Bestäm approximativt $P(Y > 10)$. (1.5p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

(2) I ett land med tvåpartisystem kallas partierna "de gula" och "de lila". 50% av männen röstar på de gula och 50% på de lila. 58% av kvinnorna röstar på de gula och 42% på de lila. Det finns lika många kvinnor som män i landet.

(a) Hur stor andel av rösterna får de gula respektive de lila? (1.5p)

(b) Vad är sannolikheten att en person som röstade på de lila är kvinna? (1.5p)

(3) Variablerna X och Y har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x, y) = 6x(1 - x)$$

för alla (x, y) sådana att $0 \le x \le 1$ och $0 \le y \le 1$, utanför denna kvadrat är $f(x, y) = 0$.

(a) Bestäm $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. Är X och Y oberoende? (1p)

(b) Beräkna $E[X + Y]$ och $Var(X + Y)$. (1p)

(c) Beräkna sannolikheten att $X + Y > 3/2$. (1p)

(4) (a) Antag att vid varje uppkörningsförsök Kalle gör är sannolikheten 0.8 att han klarar sig. Vad är sannolikheten att det krävs exakt 3 försök för Kalle att få ett körkort om man kan anta oberoende mellan försöken? (1p)

(b) Olle är lite listigare än Kalle och övar mellan försöken. Sannolikheten att han klarar sig på försök i är $0.8 + 0.02(i - 1)$. Har han inte fått sitt körkort efter 5 försök ger han upp. Vad är sannolikheten att Olle inte får något körkort? (2p)

(5) $X_1, \dots, X_n$ är oberoende stokastiska variabler som alla är $N(\mu, 0.2)$, dvs. normalfördelade med väntevärde μ och standardavvikelse 0.2 .

(a) Ange fördelningen (typ och parametrar) för $\bar{X} - \mu$ där $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. (1p)

(b) Beräkna $P(|\bar{X} - \mu| > 0.2/\sqrt{n})$. (1p)

(c) Hur stort måste n vara för att $P(|\bar{X} - \mu| > 0.01)$ skall understiga 0.001? (1p)

(6) (a) Bestäm konstanten c så att

$$f(x) = \begin{cases} c/\sqrt{x+1} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases} \quad .$$

blir en täthetsfunktion. (1.5p)

(b) Beräkna sannolikheten att en stokastisk variabel med denna täthetsfunktion antar ett positivt värde. (1.5p)

Ledning: $\int 1/\sqrt{x+1}\,dx = 2\sqrt{x+1} + C,\ -1 < x < 1.$

Lösningar

(1) Vi har en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler $X_1, \ldots, X_{100}$ med gemensam sannolikhetsfunktion $P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/3$.
(a) $\mu = E[X_1] = 0$, $\sigma^2 = Var(X_1) = 2/3$
(b) Här ska vi sätta $Y = X_1 + \ldots + X_{100}$ och approximera $P(Y > 10)$, och då behöver vi använda centrala gränsvärdessatsen.

$$\begin{aligned} P(Y > 10) &= P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 10\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}} > \frac{10 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \\ &\approx P(Z > 1.22) = 1 - \Phi(1.22) = 1 - 0.8888 = 0.1112 \end{aligned}$$

där $Z \sim N(0,1)$.

(2) Tag en väljare på måfå och låt K vara händelsen att väljaren är en kvinna och L händelsen att väljare röstar på de lila. I uppgiften ges $P(L|K^c) = 0.5$, $P(L|K) = 0.42$, $P(K) = 0.50$.
(a) Vi söker $P(L)$ och $P(L^c) = 1 - P(L)$. Enligt lagen om total sannolikhet gäller

$$P(L) = P(L|K)P(K) + P(L|K^c)P(K^c) = 0.42 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.46$$

$$P(L^c) = 1 - P(L) = 0.54.$$

(b) Vi söker $P(K|L)$. Enligt Bayes sats är

$$P(K|L) = \frac{P(L|K)P(K)}{P(L)} = \frac{0.42 \cdot 0.5}{0.46} = 0.457\,.$$

(3) (a) $f_X(x) = 6x(1-x)$, $0 \le x \le 1$, och $f_Y(y) = 1$, $0 \le y \le 1$. X och Y är oberoende.
(b)

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x)\,dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot 1\,dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 1\,.$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x)\,dx = \frac{3}{10} \qquad E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 1\,dy = \frac{1}{3}$$

$$Var(X+Y) = E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{2}{15}\,.$$

(c)

$$\begin{aligned} P\left(X + Y > \frac{3}{2}\right) &= P\left(Y > \frac{3}{2} - X\right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{3}{2}-x}^1 f(x,y)\,dy\right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{3}{2}-x}^1 6x(1-x)\,dy\right) dx \\ &= \frac{3}{32}\,. \end{aligned}$$

(4) (a) Det gäller att $p = P(\text{lyckas på försök } i) = 0.8$. Låt X = antal försök han behöver för att lyckas. Vi får

$$P(X = 3) = (1-p)^2 \cdot p = 0.2^2 \cdot 0.8 = 0.032\,.$$

(b) $P(\text{Inget körkort}) = P(\text{Misslyckas på uppkörningen på alla 5 försök})$. Låt $A_i := \{\text{Misslyckas på försök } i\}$. Således

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \ldots \cap A_5) &= P(A_1) \ldots P(A_5) \\ &= (1-0.8)(1-(0.8+0.02))(1-(0.8+0.04))(1-(0.8+0.06)) \times \\ &\quad \times (1-(0.8+0.08)) \\ &= 9.7 \cdot 10^{-5}\,. \end{aligned}$$

(5) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.18.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 3.14.