Kurskod: TAMS65
Provkod: TEN1/TEN2

MATEMATISK STATISTIK I FORTSÄTTNINGSKURS

Tentamen måndagen den 10 juni 2019 kl 8–12

Hjälpmedel: Formelsamling i matematisk statistik utgiven av matematiska institutionen och/eller formelsamling ”Formel- och tabellsamling i matematisk statistik TAMS65 (Martin Singull)”. Inga anteckningar i formelsamlingarna är tillåtet. Miniräknare med tömda minnen. Språklexikon.
TEN1 Betygsgränser: 8-11 poäng ger betyg 3, 11.5-14.5 betyg 4 och 15-18 poäng betyg 5.
TEN2 Betygsgränser: 7-9 poäng ger betyg 3, 9.5-12 betyg 4 och 12.5-15 poäng betyg 5.
Examinator: Martin Singull, Matematisk statistik, MAI
Resultatet meddelas *normalt* via LADOK inom 12 arbetsdagar.
Tydliga svar och motiveringar krävs till varje uppgift.

1. På en vårdcentral registrerade man under ett år antalet behandlade benbrott per vecka. Man fick följande observationer.

Antal benbrott	0	1	2	3	4	5
Frekvens	8	14	13	8	5	4

   d.v.s., under 8 veckor var det 0 benbrott, under 14 veckor var det 1, under 13 veckor var det 2, o.s.v.

   Någon föreslår att antalet benbrott är Poissonfördelat enligt $X \sim Po(\mu)$, där μ är antalet benbrott per vecka.

   (a) Skatta μ på lämpligt sätt. (1p)

   (b) Pröva med ett χ^2-test hypotesen H_0 : Antalet benbrott är Poissonfördelat, på nivån 5%. (2p)

2. Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara ett stickprov av storleken $n > 2$ av oberoende observationer från en stokastiskt variabel X med väntevärdet $\mathrm{E}(X) = \mu$ och variansen $\mathrm{var}(X) = \sigma^2$. Antag att vi har följande två skattningar av väntevärdet μ

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{och} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{x_1 + x_n}{2}.$$

   (a) Visa att båda skattningarna är väntevärdesriktiga. (1p)

   (b) Vilken skattning är effektivast? Motivera ditt svar. (1p)

   (c) Är någon av skattningarna en konsistent skattning av μ?
   Motivera ditt svar. (1p)

3. Låt $x_1, \ldots, x_n$ vara n oberoende observationer från en stokastisk variabel som har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \theta x^{-(\theta+1)} & \text{för } x > 1, \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där $\theta > 0$ är en okänd parameter.

(a) Bestäm maximum-likelihood-skattningen av θ. (2p)

(b) (Endast TEN2) Härled en punktskattning av θ med momentmetoden. (1p)

4. Antag att de stokastiska variablerna $X \sim N(\mu_1, 1)$ och $Y \sim N(\mu_2, 1)$ är oberoende. Ett slumpmässigt stickprov tas från X och Y omfattande 8 respektive 10 observationer och man beräknar medelvärdena $\bar{x} = 1.89$ och $\bar{y} = 1.12$.

   (a) Pröva hypotesen

   $$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \quad \text{mot} \quad H_1 : \mu_1 > \mu_2,$$

   på nivån 5%. (1.5p)

   (b) Beräkna testets styrka då $\mu_1 = 2$ och $\mu_2 = 1$ (1.5p)

5. Antal fel vid tillverkning av en viss elektronik kan anses vara Poissonfördelat med väntevärde μ. All elektronik kontrolleras och felaktiga enheter, oavsett antal fel, skrotas. Under en vecka skrotades 88 av 1000 tillverkade enheter.

   (a) Punktskatta μ. (1p)

   (b) Konstruera ett approximativt 95% konfidensintervall för μ. (2p)

6. (Endast TEN1) För att undersöka hur bilars vikt och motorstyrka påverkar bensinförbrukningen undersöktes dessa storheter på 7 bilar. Resultat

Vikt (pound)	x_1	3470	3674	3460	3520	3610	3439	3285
Hästkrafter	x_2	240	232	245	192	190	210	210
Förbrukning (miles/gallon)	y	21.3	19.8	20.7	18.8	20.0	20.7	23.3

med följande regressionsmodell

$$\textbf{Modell 1: } Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \varepsilon,$$

där $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$.

Skattad regressionslinje: $y = 48.5 - 0.009x_1 + 0.01x_2$

i	$\widehat{\beta}_i$	$d(\widehat{\beta}_i)$
0	48.5166	11.9063
1	-0.0088	0.0032
2	0.017	0.0179

Variansanalys:

	Frihetsgrader	Kvadratsumma
REGR	2	8.2029
RES	4	3.8143
TOT	6	12.0172

(a) Undersök med lämpliga test eller konfidensintervall om var och en av förklaringsvariablerna gör nytta. Varje test ska vara på signifikansnivån 5%. (1p)

Givet resultatet i (a) analyserar vi observationerna enligt följande modell

$$\textbf{Modell 2: } Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon,$$

där $\varepsilon \sim N(0, \sigma)$ med följande resultat.

Skattad regressionslinje: $y = 51.9 - 0.009x_1$

i	$\widehat{\beta}_i$	$d(\widehat{\beta}_i)$
0	51.9438	10.6445
1	-0.0090	0.0030

Variansanalys:

	Frihetsgrader	Kvadratsumma
REGR	1	7.6148
RES	5	4.4023
TOT	6	12.0171

$$(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 128.68909 & -0.03679 \\ -0.03679 & 0.000011 \end{pmatrix}$$

(b) För Modell 2, skissa observationerna samt den skattade regressionslinjen i en figur. (1p)

(c) (Fel i uppgiften) Examinatorn har en bil med 230 hästkrafter (vilket är ett önsketänkande), vilken förbrukning kan han förvänta sig? Bilda ett lämpligt 95% intervall för att besvara frågan. (2p)