Kurskod: TAMS65
Provkod: TEN2

MATEMATISK STATISTIK I FORTSÄTTNINGSKURS

Tentamen torsdagen den 21 mars 2019 kl 14–18

Hjälpmedel: Formelsamling i matematisk statistik utgiven av matematiska institutionen och/eller formelsamling "Formel- och tabellsamling i matematisk statistik TAMS65 (Martin Singull)". Inga anteckningar i formelsamlingarna är tillåtet. Miniräknare med tömda minnen. Språklexikon.
Betygsgränser: 7-9 poäng ger betyg 3, 9.5-12 betyg 4 och 12.5-15 poäng betyg 5.
Examinator: Martin Singull, Matematisk statistik, MAI
Resultatet meddelas *normalt* via LADOK inom 12 arbetsdagar.
Tydliga svar och motiveringar krävs till varje uppgift.

1. I en Amerikansk studie har man för en viss kurs undersökt kopplingen mellan studenters närvaro på undervisningen och tentamensresultatet och fått följande data

Antal missade undervisningstillfällen	Resultat på tentamen ≥ 80	70–79	< 70
Inget	18	11	6
1–5	14	12	6
Mer än 5	3	9	20

   För varje frånvarokategori antar vi att studenterna har valts slumpmässigt ur en mycket stor population.

   Undersök ed hjälp av ett lämpligt test på nivån 1% om närvaro på undervisningen verkar ha betydelse för tentamensresultatet. (2p)

2. I en maskin monteras ett verktyg i en hållare och man "drar åt". I ett försök utnyttjade man tre olika åtdragningsmoment mellan hållare och verktyg och i varje försök bestämda man x-koordinaterna för skärspetsen i verktyget. För varje åtdragningsmoment gjordes 21 mätningar. Resultat för x-koordinaterna (enhet: 10^{-4} mm):

Moment	$\bar{x}_i$	s_i
60	-20.167	4.1363
70	4.3000	3.1310
80	9.7667	4.1662

   Modell: Vi har oberoende observationer från $N(\mu_i, \sigma_i)$, där $i = 1, 2, 3$.

   (a) Pröva på nivån 10% hypotesen

   $$H_0 : \sigma_2 = \sigma_3 \quad \text{mot} \quad H_1 : \sigma_2 \neq \sigma_3.$$

   (Egentligen ska även de andra standardavvikelserna jämföras, men du behöver inte genomföra de testen.) (1p)

(b) Anta nu att $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$. Gör parvisa jämförelser mellan väntevärdena genom att konstruera lämpliga konfidensintervall, vart och ett med konfidensgraden 99%. Två åtdragningsmoment anses likvärdiga om $|\mu_i - \mu_k| < 10$. Är detta uppfyllt för något par? (2p)

3. Man har gjort oberoende mätningar av exekveringstider $x_1, ..., x_n$ (enhet: ms) för $n = 40$ körningar på en centraldator. Resultat:

10	19	90	40	15	11	32	17	4	152
23	13	36	101	2	14	2	23	34	15
27	1	57	17	3	30	50	4	62	48
9	11	20	13	38	54	46	12	5	26

där $\bar{x} = 29.65$.

Modell: De s.v. X_i är exponentialfördelade med väntevärde μ, dvs. med täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}, \qquad \text{för } x \geq 0.$$

(a) Härled maximum-likelihood-skattningen av μ. (2p)

(b) Visa att maximum-likelihood-skattningen är en väntevärdesriktig skattning av μ och beräkna dess varians. (1p)

(c) Konstruera ett tvåsidigt approximativt 95% konfidensintervall för μ. (2p)

4. För sjutton olika kärnkraftverk har man under ett år noterat antalet säkerhetsrelaterade fel som uppstått då reaktorn inte varit i drift (motsvarande värden för reaktorer i drift finns också). Reaktorerna är av två typer BWR = boiling water reactor, och PWR = pressurized water reactor. Observationer:

BWR	1	5	4	7	10	8	7	10	4
PWR	8	7	3	0	1	2	3	6	

Modell: Vi har två oberoende stickprov från $Po(\mu_1)$ respektive $Po(\mu_2)$.

Finns det någon skillnad mellan de båda reaktortyperna i fråga om felintensitet under ett år? Konstruera ett lämpligt konfidensintervall med konfidensgraden approximativt 95% och redovisa din slutsats. (3p)

5. Antag att vi har en observation x från den s.v. X med täthetsfunktionen

$$f(x) = \theta^2 e^{-\theta^2 x}, \quad 0 \leq x < \infty.$$

Vi vill testa hypotesen

$$H_0 : \theta = 1 \quad \text{mot} \quad H_1 : \theta > 1,$$

på nivån 5%. Beräkna det kritiska området. (2p)

Tips: Vill man förkasta H_0 till förmån för H_1 för stor eller liten observation x?