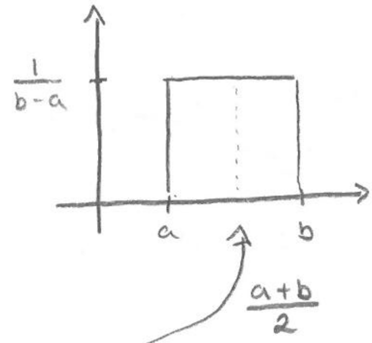
Räkneföreläsning 1 (Punktskattning)

Problem 1 - Rektangelfördelning

Täthetsfunktion: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0 \end{cases}$



Vi har två parametrar = Två moment

$$\mu_1(a,b) = E(X) = \int_a^b x f(x)\,dx = \frac{a+b}{2}$$ (Jämviktspunkten mellan a & b)

$$\mu_2(a,b) = E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)\,dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx = \ldots = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \ldots = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

Empiriska momenten

$$\begin{cases} \mu_1(\hat{a},\hat{b}) = \dfrac{\hat{a}+\hat{b}}{2} = \bar{x} = \hat{\mu}_1 & \text{(Medelvärde av observationer)} \\ \mu_2(\hat{a},\hat{b}) = \dfrac{\hat{a}^2+\hat{a}\hat{b}+\hat{b}^2}{3} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \hat{\mu}_2 & \text{(Medelvärde av observationer i kvadrat)} \end{cases}$$

Ta alltid så låga moment som möjligt & lika många som antalet parametrar

$$\hat{a} = \hat{\mu}_1 - \sqrt{3(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2)} \qquad \hat{\mu}_1 = \bar{x}$$

$$\hat{b} = \hat{\mu}_1 + \sqrt{3(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1^2)} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Problem 2 - Re(0, θ)

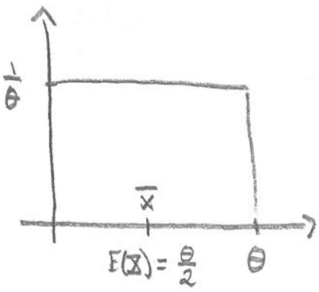
a) $X \sim Re(0, \theta)$

$E(X) = \frac{\theta}{2} = \mu(\theta)$

mm ger $\mu(\hat{\theta}) = \bar{x}$

$\frac{\hat{\theta}}{2} = \bar{x} \iff \boxed{\hat{\theta} = 2\bar{x}}$ Momentskattning

$X \sim Re(0, \theta)$



b) $f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$L(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^n} & 0 \leq x_i \leq \theta \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

$$\boxed{L(\theta) = \underbrace{f(x_1;\theta)}_{\frac{1}{\theta}} \cdot \underbrace{f(x_2;\theta)}_{\frac{1}{\theta}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{f(x_n;\theta)}_{\frac{1}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n}, \quad 0 \leq x_i \leq \theta}$$

Vi vill göra vår likelihood så stor som möjlig $\Rightarrow$ θ så litet som möjligt, MEN som minst, max x_i, dvs den största observationen

Det vi vet är att skattningen $\hat{\theta} = \max x_i < \theta$, dvs alltid är mindre än θ. Sannolikheten att hamna på en punkt är noll, då arean under grafen är 0. Dvs vi kommer hamna nästans under θ

$\Rightarrow$ Ej vvr!

Problem 3 - PS2

Medellivslängden

$n = 400$

$x = 109$ (OBS. från den s.v $X \sim Bin(n,p)$)

p = Sannolikheten att en transistor fungerar mer än en tidsenhet

$$\hat{p} = \frac{109}{400} = \frac{x}{n}$$

$E(X) = n \cdot p = \bar{x} = x$ (då vi bara har en observation)

$$\Rightarrow \hat{p} = \frac{x}{n}$$

Vi kan också se att

$p = P(Y > 1) =$ // Dvs sannolikheten att det fungerar mer än 1 tidsenhet // $=$

$$= \int_1^\infty \frac{1}{\mu} e^{-y_i/\mu} dy = \ldots = e^{-1/\mu}$$

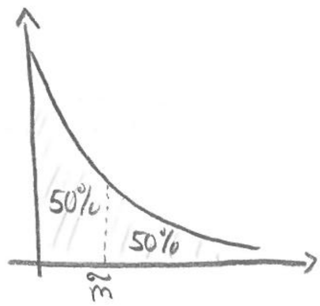
$$\boxed{Y \sim \exp(\mu)}$$

$$\hat{p} = e^{-1/\hat{\mu}} \Rightarrow \hat{\mu} = -\frac{1}{\ln(\frac{x}{n})} \approx 0{,}77$$

Medianlivslängd

$$\frac{1}{2} = F(\tilde{m}) = \int_0^{\tilde{m}} \frac{1}{\mu} e^{-y/\mu} dy = 1 - e^{-\frac{\tilde{m}}{\mu}}$$

$$\tilde{m} = \mu \ln 2 \approx 0{,}53$$



Problem 4 - Våghöjder

a) Detta görs med Maximum-Likelihood

Täthetsfunktion

$$f(x) = \frac{x}{a} e^{-x^2/2a}, \quad x \geq 0$$

$$L(a) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i ; a) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a} e^{\frac{-x_i^2}{2a}} =$$

$$= \frac{1}{a^n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) e^{-\frac{1}{2a} \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Vi logaritmerar

$$l(a) = \ln(L(a)) = -n \ln a + \ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) - \frac{1}{2a} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\frac{\partial l}{\partial a} = -\frac{n}{a} + \frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \iff \hat{a} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Stoppa in alla x_i-värden

$$a = 1.73$$

Efter detta bör vi kolla om detta är en maxpunkt eller inte!
Antingen vid andraderiv eller teckentabell

Är denna väntevärdesriktig?

$$E(\hat{A}) = E\left(\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{E(X_i^2)}_{E(X^2)} = \frac{E(X^2)}{2} = a?$$

$$E(X^2) = \int x^2 f(x) dx = \int_0^{\infty} x^2 \underbrace{\frac{x}{a} e^{-\frac{x^2}{2a}}}_{= f(a)} dx = \ldots = 2a$$

$E(\hat{A}) = a$ **vvr!**

b) $\hat{p} = P(X > 3) = \int_3^\infty \frac{x}{\hat{a}} e^{-\frac{x^2}{2\hat{a}}} dx = 0{,}074 \Rightarrow 7{,}4\%$

Dvs 7,4% av vågorna är större än 3 m

Problem 5 - Momentmetoden

Kort uträkning

$$E(X) = \int_0^1 x f(x) dx = \mu(\theta)$$

$$\mu(\hat{\theta}) = \bar{x}$$

$$\hat{\theta} = 0{,}484$$

Problem 6 - Två poisonfördelningar

$$L(\lambda) = e^{-10\lambda} \frac{(10\lambda)^{x_1}}{x_1!} e^{-5\lambda} \frac{(5\lambda)^{x_2}}{x_2!} \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{x_1 + x_2}{15}$$