LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 15 / TEN 1

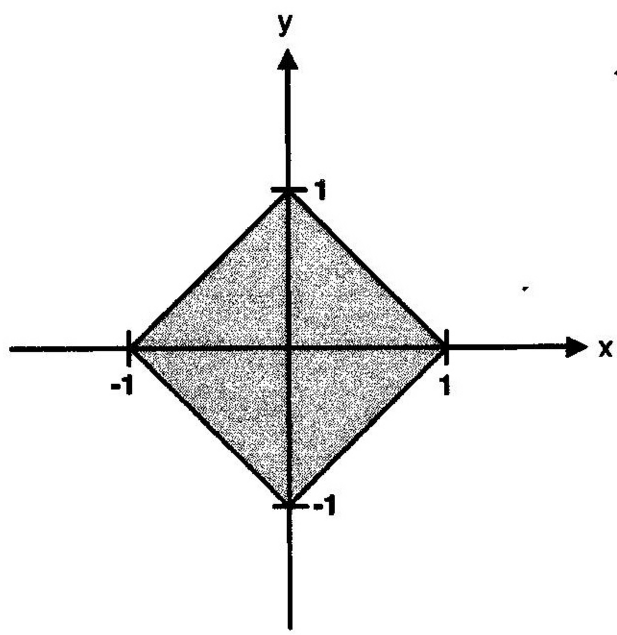
12 januari 2018, klockan 14.00-18.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

(1) Antag att vi har en tvådimensionell stokastisk variabel (X, Y) med simultan täthetsfunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/2 & \text{om } |x| + |y| \leq 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Det intressanta området är skuggat i nedanstående figur.



(a) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna för X och Y. (1p)

(b) Bestäm väntevärdena $E[X]$ och $E[Y]$. (0.5p)

(c) Är X och Y oberoende? (0.5p)

(d) Bestäm den betingade sannolikheten $P\left(|X| \leq \frac{1}{2} \,\middle|\, |Y| \leq \frac{1}{2}\right)$. (1p)

(2) Ett företag som tillverkar batterier av en viss typ har tillverkningen förlagd till tre olika fabriker. Fabrik A står för 50 % av tillverkningen, fabrik B för 20 % och fabrik C för 30 %. Man vet att ett batteri från fabrik A har sannolikheten 95 % att räcka mer än 10 drifttimmar. Motsvarande sannolikheter för fabrikerna B och C är 97 % resp. 98 %. Man har blandat batterier från de tre fabrikerna i ett stort centralt lager.

(a) Vad är sannolikheten att ett batteri som tas på måfå ur lagret ska räcka mer än 10 drifttimmar? (1p)

(b) Man tar på måfå ett batteri ur lagret och finner att det räcker mer än 10 drifttimmar. Vad är sannolikheten för att det tillverkats i fabrik A? (1p)

(c) Man tar på måfå ett batteri ur lagret och finner att det räcker mindre än 10 drifttimmar. Vad är sannolikheten för att det tillverkats i fabrik A? (1p)

(3) Lastbilar passerar över en bro till synes slumpvis över tiden. Vi vet av lång erfarenhet att det i genomsnitt passerar 0.3 lastbilar per minut. Då kan det vara rimligt att beskriva trafiken med en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 0.3$.

(a) Bestäm sannolikheten att på en viss måndag precis 10 lastbilar passerar bron mellan kl. 12.00 och kl. 12.30. (1p)

(b) Bestäm sannolikheten att på en viss torsdag högst 10 lastbilar passerar bron mellan kl. 12.30 och kl. 13.00. (1p)

(c) På en viss fredag börjar vi observera trafiken på bron precis kl. 13.00. Bestäm den förväntade väntetiden tills den första lastbilen passerar bron. (1p)

(4) För en stokastisk följd $\{X_n\}$ gäller följande kovarianser

$$Cov(X_n, X_{n+k}) = \begin{cases} 4.8 & \text{för } k = 0 \\ 3.6 & \text{för } k = \pm 1 \\ 3.1 & \text{för } k = \pm 2 \end{cases} .$$

Antag att variablerna fram till tidpunkten n är givna och att man vill göra en linjär prognos av nästkommande variabel enligt formeln

$$\widehat{X_{n+1}} := \alpha X_n + \beta X_{n-1} .$$

(a) Beräkna $Var(\widehat{X_{n+1}} - X_{n+1})$. (1.5p)

(b) Bestäm konstanterna α och β som minimerar variansen för prognosfelet, dvs. $Var(\widehat{X_{n+1}} - X_{n+1})$. (1.5p)

(5) En Markovkedja X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, med tillståndsrum $\{0, 1, 2\}$ har övergångsmatrisen

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/3 & & 1/3 \\ 1/2 & 0 & \\ & 3/4 & 0 \end{pmatrix} .$$

(a) Fyll i de tomma platserna i övergångsmatrisen ovan. (0,5p)

(b) Beräkna 2-stegsövergångsmatrisen, dvs. $\boldsymbol{P}^{(2)}$. (1p)

(c) Antag att Markovkedjan har startvektorn $\boldsymbol{p}^{(0)} = (1/2, 1/2, 0)$. Bestäm fördelningen av X_2, dvs.

$$\boldsymbol{p}^{(2)} \equiv (p_0^{(2)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}) = (P(X_2 = 0), P(X_2 = 1), P(X_2 = 2)).$$

(0.5p)

(d) Finns det någon gränsfördelning (ingen?,unik?,flera?). Beräkna alla gränsfördelningar. (1p)

(6) Livslängden för en viss typ av elektronrör är exponentialfördelad med väntevärde 200. Ett sådant rör ingår i en radarutrustning som ständigt är i bruk på ett fartyg. När ett elektronrör går sönder byts det genast ut mot ett nytt. Man har 50 sådana elektronrör i lager på fartyget. Livslängden för olika rör för förutsätts vara oberoende. Beräkna en tid t sådan att lagret räcker åtminstone denna tid med sannolikheten 0.9. (3p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

Lösningar

(1) (a)

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1-x}^{1+x} \frac{1}{2}\,dy & \text{om } -1 \le x \le 0 \\ \displaystyle\int_{-1+x}^{1-x} \frac{1}{2}\,dy & \text{om } 0 \le x \le 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1+x & \text{om } -1 \le x \le 0 \\ 1-x & \text{om } 0 \le x \le 1 \end{cases} \\
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx \\
&= \begin{cases} 1+y & \text{om } -1 \le y \le 0 \\ 1-y & \text{om } 0 \le y \le 1 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

(b) $E[X] = 0$, $E[Y] = 0$ p.g.a. symmetri av f_X resp. f_Y.

(c)

$$
f_X(0) \cdot f_Y(0) = 1 \neq \frac{1}{2} = f_{(X,Y)}(0,0)
$$

medför att X och Y inte är oberoende.

(d) Det gäller att

$$
\begin{aligned}
P\left(|X| \le \tfrac{1}{2} \,\middle|\, |Y| \le \tfrac{1}{2}\right) &= \frac{P(|X| \le \frac{1}{2}, |Y| \le \frac{1}{2})}{P(|Y| \le \frac{1}{2})} = \frac{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_Y(y)\,dy} \\
&= \frac{1/2}{3/4} = \frac{2}{3} .
\end{aligned}
$$

(2) Låt A, B och C beteckna händelserna att ett på måfå valt batteri kommer från fabrik A, B eller C. Vidare, låt R beteckna händelsen att valt batteri räcker mer än 10 drifttimmar.

(a) Total sannolikhet:

$$
\begin{aligned}
P(R) &= P(R|A) \cdot P(A) + P(R|B) \cdot P(B) + P(R|C) \cdot P(C) \\
&= 0.95 \cdot 0.5 + 0.97 \cdot 0.2 + 0.98 \cdot 0.3 = 0.963 .
\end{aligned}
$$

(b) Definition betingad sannolikhet:

$$
P(A|R) = \frac{P(A \cap R)}{P(R)} = \frac{0.475}{0.963} = 0.49325 .
$$

(c) Bayes' formel:

$$
P(A|R^c) = \frac{P(R^c|A) \cdot P(A)}{P(R^c)} = \frac{P(R^c|A) \cdot P(A)}{1 - P(R)} = \frac{0.05 \cdot 0.5}{0.037} = 0.6757 .
$$

(3) (a) Låt $N(30)$ vara antalet lastbilar som passerar bron kl. 12.00-12.30 en viss måndag. Vi har att $N(30) \sim Po(0.3 \cdot 30)$ och sannolikheten att exakt 10 lastbilar passerar är

$$P(N(30) = 10) = \frac{(0.3 \cdot 30)^{10}}{10!} \cdot e^{-0.3 \cdot 30} = \frac{9^{10}}{10!} \cdot e^{-9} \approx 0.119.$$

(b) Låt $N'(30)$ vara antalet lastbilar som passerar bron kl. 12.30-13.00 en viss torsdag. Vi har att $N'(30) \sim Po(0.3 \cdot 30)$. Tabellen ger $P(N'(30) \leq 10) = 0.70599$.

(c) På en viss fredag börjar vi observera trafiken på bron precis kl. 13.00. Väntetiden T_1 tills den första lastbilen passerar bron är $Exp(\lambda)$-fördelad. Den förväntade väntetiden är alltså

$$E[T_1] = \frac{1}{\lambda} = 10/3 \text{ min} = 3 \text{ min} : 20 \text{ sec.}$$

(4) (a)

$$Var(\widehat{X_{n+1}} - X_{n+1}) = \alpha^2 Var(X_n) + \beta^2 Var(X_{n-1}) + Var(X_{n+1})$$

$$-2\alpha Cov(X_n, X_{n+1}) - 2\beta Cov(X_{n-1}, X_{n+1}) + 2Cov(X_n, X_{n-1})$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2 + 1) \cdot 4.8 - 2\alpha \cdot 3.6 - 2\beta \cdot 3.1 + 2\alpha\beta \cdot 3.6$$

$$=: g(\alpha, \beta)\,.$$

(b) Tvådimensionell differentialkalkyl ger att g blir minimal för $\alpha = \frac{17}{28} \approx 0.61$ och $\beta = \frac{4}{21} \approx 0.19$.

(5) (a) - (c) Se Jan Enger, Jan Grandell: Kompendium om Markovkedjor, Markovprocessor och tillmpningar, Problem 1,
`http://www.math.kth.se/matstat/gru/markovkomp.pdf`

(d) $\boldsymbol{\pi} = (15/41\,,\ 14/41\,,\ 12/41)$.

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 6.23.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS15/Dokument/blomsvar.pdf`