LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 15 / TEN 1

24 augusti 2017, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistik utgiven av MAI, och ett ytterligare formelblad (ett blad med text på båda sidorna).

(1) Låt den kontinuerliga tvådimensionella slumpvariabeln (X, Y) ha täthetsfunktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} .$$

(a) Bestäm de marginella täthetsfunktionerna $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. (1p)

(b) Bestäm väntevärdena $E[X]$ och $E[Y]$. (1p)

(c) Beräkna kovariansen mellan X och Y, $Cov(X, Y)$. (1p)

(2) Livslängden hos en viss typ av elektroniska komponent modelleras med hjälp av en slumpvariabel X med väntevärde $E[X] = 5$ dygn och varians σ^2. Livslängden hos olika komponenter antas vara oberoende.

(a) Beräkna sannolikheten att den sammanlagda livslängden hos 30 komponenter ligger mellan 120 och 180 dygn om $\sigma = 4.5$. Använd centrala gränsvärdessatsen. (1.5p)

(b) Man vill garantera att sannolikheten att den sammanlagda livslängden hos 30 komponenter ligger mellan 120 och 180 dygn är minst 0.9. Vad är det största värdet på σ som gör att detta uppfylls? (1.5p)

(3) I en fabrik tillverkas 25% av enheterna vid maskin 1, 35% vid maskin 2 och 40% vid maskin 3. Av produktionen är respektive 1%, 2% och 3% defekt. Man blandar enheterna och sänder dem till kunderna.

(a) Hur stor är sannolikheten att en slumpmässigt vald enhet är felaktig? (1p)

(b) Antag att en kund påträffar en felaktig enhet. Hur stor är sannolikheten att den har tillverkats vid maskin 1. (2p)

(4) En dartspelare försöker träffas *Bull's eye* (innerste lilla cirkeln i piltavlan). Antag att hon träffar Bull's eye med sannolikhet 0.1 i varje enskild kast och att kasten sker oberoende. Låt X vara antalet kast som krävs tills hon träffar Bull's eye inklusive det lyckade kastet.

(a) Bestäm sannolikhetsfunktionen av X. (1p)

(b) Låt j och k vara strikt positiva heltal. Beräkna $P(X > k + j | X > j)$. (2p)

(5) Antalet grammofonspelare som säljs hos handlare Alex beskrivs av en Poissonprocess med intensitet 0.3 enheter per dag. Den flitige Alex hat öppet 7 dagar i veckan och vid söndag kväll ringer han in beställning hos leverantören för nya produkter som dyker upp måndag morgon.

(a) Beräkna sannolikheten att minst en grammofonspelare säljs under en dag. (1p)

(b) Beräkna sannolikheten att inga grammofoner säljs på en hel vecka. (1p)

(c) En vecka tar grammofonerna slut redan på fredag. På söndag besluter sig Alex, för att undvika att detta händer igen, att beställa så många grammofoner att han med minst 99% sannolikhet ska ha så det räcker hela veckan därpå. Hur många måste han då minst beställa? (1p)

(6) Vid en tillverkning ställs vikten in till μ gram. De tillverkade enheterna får då vikter som är oberoende och normalfördelade med väntevärde μ och standadavvikelse $\sigma = 8$ gram. För att kontrollera produktionen tar man regelbundet ut 4 enheter, väger dessa och bildar medelvärdet $\bar{x}$ av vikterna. Om $\bar{x} > K$ stoppas produktionen.

Ledning: Här anses x_1, x_2, x_3, x_4 som utfall av de slumpmässiga vikterna X_1, X_2, X_3, X_4 av de 4 uttagna enheterna. Vidare används $\bar{x} = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$ och $\bar{X} = \frac{1}{4}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$.

(a) Bestäm konstanten K så att sannolikheten $P(\bar{X} > K)$ att produktionen stoppas när $\mu = 500$ gram är 0.01. (1.5p)

(b) Med K som i (a), för vilka värden på μ kommer produktionen att stoppas med en sannolikhet som är större än 0.9? (1.5p)

Lösningar

(1) (a)

$$f_X(x) \;=\; = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2} \quad 0 \le x \le 1.$$

Annars $f_X(x) = 0$. På samma sätt fås $f_Y(y) = y + \frac{1}{2}$, $0 \le y \le 1$. Annars $f_Y(y) = 0$.

(b) Det gäller att

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot (x + \frac{1}{2})\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{7}{12}.$$

På samma sätt fås $E[Y] = \frac{7}{12}$.

(c) Det gäller att $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$ och

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy \cdot f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy \cdot (x+y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}y + \frac{x^2}{2}y^2\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2}\right) dy \\ &= \left[\frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Således $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{1}{3} - \frac{7^2}{12^2} = -\frac{1}{144} \approx -0.0069$.

(2) Låt $X_1, X_2, \ldots, X_{30}$ beteckna komponenternas livslängder i dygn. Vi har då att $X_1, X_2, \ldots, X_{30}$ är oberoende och likafördelade med $E[X_i] = 5$ dygn och $Var(X_i) = \sigma^2$. Låt Y vara den sammanlagda livslängden för 30 komponenter, dvs. $Y = X_1 + \ldots + X_{30}$.

(a) Eftersom Y är en summa av 30 st oberoende likafördelade stokastiska variabler kan vi använda oss av centrala gränsvärdessatsen för att beräkna sannolikheten att $120 \le Y \le 180$ enligt

$$\begin{aligned} P(120 \le Y \le 180) &= P\left(\frac{120 - 30\cdot 5}{\sigma\sqrt{30}} \le \frac{Y - 30\cdot 5}{\sigma\sqrt{30}} \le \frac{180 - 30\cdot 5}{\sigma\sqrt{30}}\right) \\ &\approx P\left(\frac{-\sqrt{30}}{\sigma} \le Z \le \frac{\sqrt{30}}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Här har vi $Z \sim N(0,1)$ vilket tillsammans med $\sigma = 4.5$ och symmetriargument ger att

$$P(120 \le Y \le 180) \approx 2P\left(Y \le \frac{\sqrt{30}}{\sigma}\right) - 1 = 2\,\Phi(1.22) - 1 = 0.78.$$

(b) För att bestämma σ så att $P(120 \le Y \le 180) \ge 0.9$ använder vi oss av att enligt centrala gränsvärdessatsen

$$0.9 \le P(120 \le Y \le 180) \approx 2\,\Phi\left(\frac{\sqrt{30}}{\sigma}\right) - 1.$$

Vi får $\frac{\sqrt{30}}{\sigma} \ge 1.645$ och således $\sigma \le 3.33$.

(3) (a) Låt A beteckna händelsen {enhet är felaktig}. Enligt lagen om "total sannolikhet" gäller det att

$$P(A) = 0.25 \cdot 0.01 + 0.35 \cdot 0.02 + 0.40 \cdot 0.03 = 0.0215\,.$$

(b) Låt H_i beteckna händelsen {enhet har tillverkats vid maskin i}, $i = 1, 2, 3$. Bayes' formel medför att

$$P(H_1|A) = \frac{0.25 \cdot 0.01}{0.25 \cdot 0.01 + 0.35 \cdot 0.02 + 0.40 \cdot 0.03} = 0.116\,.$$

(4) (a) $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$, $k = 1, 2, \ldots$.
(b) X är större än i om och endast om de första i kasten har misslyckats. Således är $P(X > i) = 0.9^i$. Vi får

$$\begin{aligned}
P(X > j + k|X > j) &= \frac{P(X > j + k, X > j)}{P(X > j)} \\
&= \frac{P(X > j + k)}{P(X > j)} \\
&= \frac{0.9^{j+k}}{0.9^j} = 0.9^k \\
&= P(X > k)\,.
\end{aligned}$$

(5) (a) Om X är antalet förfrågningar under en dag, så är $X \sim Poiss(0.3)$. Då gäller att

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-0.3} \approx 0.26\,.$$

(b) Om Y är antalet förfrågningar på en vecka gäller att $Y \sim Poiss(7 \cdot 0.3) = Poiss(2.1)$. Således är $P(Y = 0) = e^{-2.1} \approx 0.12$.

(c) Ur tabell få vi att $P(Y \leq 5) = 0.9796$ samt att $P(Y \leq 6) = 0.9941$. Alex måste således ha minst 6 grammofonspelar för att med minst 99% sannolikhet täcka en hel veckas förfrågningar.

(6) Medelvärdet $\bar{x}$ av de fyra vikterna är en observation av $\bar{X} \sim N(\mu, 8/\sqrt{4}) = N(\mu, 4)$.

(a) $\mu = 500$ ger

$$0.01 = P(\bar{X} > K) = 1 - P(\bar{X} \leq K) = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 500}{4} \leq \frac{K - 500}{4}\right)$$

som medför att

$$0.01 = 1 - \Phi\left(\frac{K - 500}{4}\right)\,.$$

Vi får

$$\frac{K - 500}{4} = 2.3263$$

så att

$$K = 500 + 4 \cdot 2.3263 = 509.3\,.$$

(b) För allmänt μ,

$$P(\bar{X} > K) = 1 - P(\bar{X} \leq K) = 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{4} \leq \frac{K - \mu}{4}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{K - \mu}{4}\right)\,.$$

Det betyder att $P(\bar{X} > K) \geq 0.9$ medför att

$$\Phi\left(\frac{K-\mu}{4}\right) \leq 0.1 \quad \text{eller ekvivalent att} \quad \Phi\left(\frac{\mu-K}{4}\right) \geq 0.9\,.$$

Vi får

$$\frac{\mu-K}{4} \geq 1.2815\,,$$

vilket ger att $\mu \geq K + 4 \cdot 1.2816 = 509.3 + 5.1 = 514.4$.