LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 15 / TEN 1

19 april 2017, klockan 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistisk utgiven av MAI, och ett ytterligare formel-blad (framsida och baksida).

(1) För en poissonprocess med intensitet $\lambda > 0$ anta att högst en händelse inträffade under de första två tidsenheterna. Beräkna sannolikheten för att det efter $s+2$ tidsenheter har inträffat exakt $k+1$ händelser, $s \geq 0$, $k = 0, 1, \ldots$. (3p)

(2) Låt $U_1, U_2, \ldots,$ vara oberoende stokastiska variabler som alla är $U(0,1)$-fördelade, dvs. kontinuerligt likformigt fördelade på intervallet $(0,1)$. Låt $g(u) = \sqrt{u}$ och definiera $X_i = g(U_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

(a) Bestäm fördelningsfunktion och täthetsfunktion för X_i, dvs. $F_{X_i}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, och $f_{X_i}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. (1p)

(b) Beräkna $E[X_i]$ och $Var(X_i)$. (0.5p)

(c) Låt

$$Y = \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

Vilken fördelning har Y approximativt? (0.5p)

(d) Beräkna $P(Y > 60)$ approximativt. (1p)

(3) Per och Pål har elva frukter av vilka tre är giftiga. Per äter fyra på måfå valda frukter och Pål sex; hunden får den återstående. Beräkna

(a) sannolikheten att hunden klarar sig, (0.5p)

(b) den betingade sannolikheten att både Per och Pål blir förgiftade om hunden klarar sig, (1.5p)

(c) sannolikheten att både Per och Pål blir förgiftade och hunden klarar sig. (1p)

(4) Åtta torn placeras slumpvis på var sin ruta i ett schackbräde. Beräkna sannolikheten att inget av tornen kan slå det andra, med andra ord, att det hamnar precis ett torn i varje lodrät och vågrät rad på brädet. Ett schackbräde består av 8×8 rutor. (3p)

(5) De make-och-maka fysikerna Paul och Tatyana Ehrenfest introducerade en konceptionell modell för förflyttning av molekyler, i vilken M molekyler är fördelade på två urnor. Vid varje tidpunkt $n \in \mathbb{N}$ väljs slumpmässigt en av molekylerna och förflyttas från sin urna till den andra urnan. Låt X_n beteckna antalet molekyler i den första urnan omedelbart efter den n:e förflyttningen.

(a) Bestäm övergångsmatrisen av Markovkedjan X_n, $n \in \mathbb{N}$. (1p)

(b) Visa att $\pi \equiv (\pi_0, \ldots, \pi_M)$ där $\pi_m = 2^{-M}\binom{M}{m}$, $m = 0, \ldots, M$, är en stationär fördelning för X_n, $n \in \mathbb{N}$.

(6) Två personer A och B har stämt möte på ett kafé ”litet efter klockan åtta”. A anländer X minuter efter åtta och B anländer Y minuter efter åtta. Anta nu att X är $U(0,4)$-fördelad och Y är $U(0,6)$-fördelad (enhet är minuter). X och Y antas vara oberoende.

(a) Bestäm den simultana täthetsfunktionen av (X, Y). (1p)

(b) Vad är sannolikheten att A får vänta på B, dvs. vad är $P(X < Y)$? (2p)

Lösningar

(1)

$$
\begin{aligned}
P(N(s+2)=k+1|N(2)\le 1) &= \frac{P(N(s+2)=k+1, N(2)\le 1)}{P(N(2)\le 1)} \\
&= \frac{P(N(s+2)=k+1, N(2)=0)}{P(N(2)\le 1)} + \frac{P(N(s+2)=k+1, N(2)=1)}{P(N(2)\le 1)} \\
&= \frac{P(N(s+2)-N(2)=k+1, N(2)=0)}{P(N(2)\le 1)} \\
&\qquad + \frac{P(N(s+2)-N(2)=k, N(2)=1)}{P(N(2)\le 1)} \\
&= \frac{P(N(s+2)-N(2)=k+1)\cdot P(N(2)=0)}{P(N(2)\le 1)} \\
&\qquad + \frac{P(N(s+2)-N(2)=k)\cdot P(N(2)=1)}{P(N(2)\le 1)} \\
&= \frac{P(N(s)=k+1)\cdot P(N(2)=0)}{P(N(2)\le 1)} + \frac{P(N(s)=k)\cdot P(N(2)=1)}{P(N(2)\le 1)} \\
&= \frac{e^{-s\lambda}}{1+2\lambda}\left(\frac{(s\lambda)^{k+1}}{(k+1)!} + 2\lambda\frac{(s\lambda)^k}{k!}\right).
\end{aligned}
$$

(2) (a) Låt $x \in (0,1)$. Då gäller att

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\sqrt{U} \le x) = P(U \le x^2) = F_U(x^2) = x^2.$$

Dessutom gäller $F_X(x) = 0$ för $x \le 0$ och $F_X(x) = 1$ för $x \ge 1$. Tätheten fås genom derivering: $f_X(x) = d/dx F_X(x) = 2x$ för $x \in (0,1)$ och $f_X(x) = 0$ för $x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$.
(b) $E[X] = \int_0^1 x \cdot 2x\,dx = 2/3$, $E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 2x\,dx = 1/2$. Från detta får man $Var(X) = 1/2 - (2/3)^2 = 1/18$.
(c) Enligt centrala gränsvärdessatsen så är Y approximativt normalfördelad med väntevärde $nE(X) = 200/3 = 66.67$ och standardavvikelse $\sqrt{n\,Var(X)} = 2.36$.
(d) Normalapproximation ger

$$
\begin{aligned}
P(Y > 60) &= 1 - P(Y \le 60) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{60 - 66.67}{2.36}\right) = 1 - \Phi(-2.83) = \Phi(2.83) = 0.9977\,,
\end{aligned}
$$

där den sista (approximativa) likheten fås från tabell.

(3) Se 2.24 i `http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`

(4) Antalet sätt att placera ut 8 torn på schackbrädets 64 rutor är

$$\binom{64}{8} = \frac{64!}{8! \cdot 56!}\,.$$

Antalet sätt att placera ut tornen så att exakt ett hamnar i varje vågrät och lodrät rad är 8!. Den sökta sannolikheten är alltså $(8!)^2 \cdot 56!/64!$, som är ungefär 9 på en miljon.

(5) (a)

$$
(p_{ij})_{i,j=0,\ldots,M} \equiv \mathbf{P} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & \\
\frac{1}{M} & 0 & \frac{M-1}{M} & & & 0 & \\
& \frac{2}{M} & 0 & \frac{M-2}{M} & & & \\
& & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
& & & \frac{M-2}{M} & 0 & \frac{2}{M} & \\
& 0 & & & \frac{M-1}{M} & 0 & \frac{1}{M} \\
& & & & & 1 & 0
\end{bmatrix}.
$$

(b) Vi behöver verifiera

$$
\pi = \pi \, \mathbf{P},
$$

dvs.

$$
\begin{aligned}
\pi_0 &= \pi_1 \cdot \frac{1}{M} && (1) \\
\pi_j &= \pi_{j-1} \cdot \frac{M-j+1}{M} + \pi_{j+1} \cdot \frac{j+1}{M}, \quad j = 1, \ldots, M-1, && (2) \\
\pi_M &= \pi_{M-1} \cdot \frac{1}{M}. && (3)
\end{aligned}
$$

Såväl (1) som (3) kan skrivas som $2^{-M} = \big(2^{-M} \cdot M\big) \cdot \frac{1}{M}$, dvs. (1) och (3) är sanna. Vidare gäller

$$
\begin{aligned}
\pi_j &= 2^{-M} \binom{M}{j} = 2^{-M} \left(\binom{M-1}{j-1} + \binom{M-1}{j} \right) \\
&= 2^{-M} \binom{M}{j-1} \cdot \frac{M-j+1}{M} + 2^{-M} \binom{M}{j+1} \cdot \frac{j+1}{M} \\
&= \pi_{j-1} \cdot \frac{M-j+1}{M} + \pi_{j+1} \cdot \frac{j+1}{M}.
\end{aligned}
$$

(6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 4.7.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf`