

LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 15 / TEN 1

10 januari 2017, kl. 14.00-18.00

Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistisk utgiven av MAI, och ett ytterligare formel-blad (framsida och baksida).

- (1) Låt X_1, X_2, \dots, X_{100} vara oberoende stokastiska variabler, alla med samma fördelning given av $P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/3$.

(a) Bestäm väntevärdet och variansen för X_1 . (1.5p)

(b) Låt $Y = X_1 + \dots + X_{100}$. Bestäm approximativt $P(Y > 10)$. (1.5p)

Ledning: Använd centrala gränsvärdessatsen.

- (2) I ett land med tvåpartisystem kallas partierna "de gula" och "de lila". 50% av männen röstar på de gula och 50% på de lila. 58% av kvinnorna röstar på de gula och 42% på de lila. Det finns lika många kvinnor som män i landet.

(a) Hur stor andel av rösterna får de gula respektive de lila? (1.5p)

(b) Vad är sannolikheten att en person som röstade på de lila är kvinna? (1.5p)

- (3) Variablerna X och Y har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x, y) = 6x(1 - x)$$

för alla (x, y) sådana att $0 \leq x \leq 1$ och $0 \leq y \leq 1$, utanför denna kvadrat är $f(x, y) = 0$.

(a) Bestäm $f_X(x)$ och $f_Y(y)$. Är X och Y oberoende? (1p)

(b) Beräkna $E[X + Y]$ och $Var(X + Y)$. (1p)

(c) Beräkna sannolikheten att $X + Y > 3/2$. (1p)

- (4) (a) Antag att vid varje uppkörningsförsök Kalle gör är sannolikheten 0.8 att han klarar sig. Vad är sannolikheten att det krävs exakt 3 försök för Kalle att få ett körkort om man kan anta oberoende mellan försöken? (1p)

(b) Vad är det förväntade antalet försök han behöver göra? (1p)

Ledning: Använd $\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = a/(1 - a)^2$ om $0 < a < 1$.

(c) Olle är lite listigare än Kalle och övar mellan försöken. Sannolikheten att han klarar sig på försök i är $0.8 + 0.02(i - 1)$. Har han inte fått sitt körkort efter 5 försök ger han upp. Vad är sannolikheten att Olle inte får något körkort? (1p)

- (5) En partikel utför en symmetrisk slumpvandring på hörnen av en kvadrat, så att den i varje steg, med lika sannolikhet, flyttar sig till något av de två intilliggande hörnen.

- (a) Beskriv partikels slumpvandring som en Markovkedja, d.v.s. bestäm övergångsmatrisen. (1p)
- (b) Bestäm väntevärdet för antalet steg tills partikeln den första gången återkommer till starthörnet. (2p)

Ledning: Inför X som antalet steg tills första återkomsten och Y_k som antalet återstående steg då partikeln befinner sig k sidor från startpunkten, $k = 1, 2$. Hitta samband mellan $E[X]$, $E[Y_1]$, $E[Y_2]$.

- (6) (a) Bestäm konstanten c så att

$$f(x) = \begin{cases} c/\sqrt{x+1} & \text{om } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{för övrigt.} \end{cases} .$$

blir en täthetsfunktion. (1.5p)

- (b) Beräkna sannolikheten att en stokastisk variabel med denna täthetsfunktion antar ett positivt värde. (1.5p)

Lösningar

- (1) Vi har en följd av oberoende och likafördelade stokastiska variabler X_1, \dots, X_{100} med gemensam sannolikhetsfunktion $P(X_i = -1) = P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/3$.

(a) $\mu = E[X_1] = 0, \sigma^2 = Var(X_1) = 2/3$

- (b) Här ska vi sätta $Y = X_1 + \dots + X_{100}$ och approximera $P(Y > 10)$, och då behöver vi använda centrala gränsvärdesatsen.

$$\begin{aligned} P(Y > 10) &= P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i > 10\right) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{100} X_i - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}} > \frac{10 - 100\mu}{\sigma\sqrt{100}}\right) \\ &\approx P(Z > 1.22) = 1 - \Phi(1.22) = 1 - 0.8888 = 0.1112 \end{aligned}$$

där $Z \sim N(0, 1)$.

- (2) Tag en väljare på måfå och låt K vara händelsen att väljaren är en kvinna och L händelsen att väljare röstar på de lila. I uppgiften ges $P(L|K^c) = 0.5, P(L|K) = 0.42, P(K) = 0.50$.

- (a) Vi söker $P(L)$ och $P(L^c) = 1 - P(L)$. Enligt lagen om total sannolikhet gäller

$$P(L) = P(L|K)P(K) + P(L|K^c)P(K^c) = 0.42 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.46$$

$$P(L^c) = 1 - P(L) = 0.54.$$

- (b) Vi söker $P(K|L)$. Enligt Bayes sats är

$$P(K|L) = \frac{P(L|K)P(K)}{P(L)} = \frac{0.42 \cdot 0.5}{0.46} = 0.457.$$

- (3) (a) $f_X(x) = 6x(1-x), 0 \leq x \leq 1$, och $f_Y(y) = 1, 0 \leq y \leq 1$. X och Y är oberoende.

- (b)

$$E[X] = \int_0^1 x \cdot 6x(1-x) dx = \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[Y] = \int_0^1 y \cdot 1 dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 1.$$

$$E[X^2] = \int_0^1 x^2 \cdot 6x(1-x) dx = \frac{3}{10} \quad E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \cdot 1 dy = \frac{1}{3}$$

$$Var(X + Y) = E[X^2] - (E[X])^2 + E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{2}{15}.$$

- (c)

$$\begin{aligned} P\left(X + Y > \frac{3}{2}\right) &= P\left(Y > \frac{3}{2} - X\right) \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{3}{2}-x}^1 f(x, y) dy\right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_{\frac{3}{2}-x}^1 6x(1-x) dy\right) dx \\ &= \frac{3}{32}. \end{aligned}$$

- (4) (a) Det gäller att $p = P(\text{lyckas på försök } i) = 0.8$. Låt $X = \text{antal försök han behöver för att lyckas}$. Vi får

$$P(X = 3) = (1 - p)^2 \cdot p = 0.2^2 \cdot 0.8 = 0.032.$$

(b)

$$E[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = \frac{1}{p}.$$

- (c) $P(\text{Inget körkort}) = P(\text{Misslyckas på uppkörningen på alla 5 försök})$. Låt $A_i := \{\text{Misslyckas på försök } i\}$. Således

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_5) &= P(A_1) \dots P(A_5) \\ &= (1 - 0.8)(1 - (0.8 + 0.02))(1 - (0.8 + 0.04))(1 - (0.8 + 0.06)) \times \\ &\quad \times (1 - (0.8 + 0.08)) \\ &= 9.7 \cdot 10^{-5}. \end{aligned}$$

- (5) (a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Låt X beteckna antalet steg tills första återkomsten och låt Y_k beteckna antalet återstående steg då partikeln befinner sig k sidor från startpunkten, $k = 1, 2$. Betingning ger

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 + E[Y_1], \\ E[Y_1] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + E[Y_2]), \\ E[Y_2] &= 1 + E[Y_1], \end{aligned}$$

så att

$$E[Y_1] = 3 \quad \text{och} \quad E[X] = 4.$$

- (6) Se lösningar till lektionsuppgifter, 3.14.

<http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS79/Dokument/blomsvar.pdf>