LINKÖPINGS UNIVERSITET

Matematiska institutionen

EXAM TAMS 15 / TEN 1

22 augusti 2016, kl. 8.00-12.00
Examinator: Jörg-Uwe Löbus (Tel: 0709-602827)

Tillåtna hjälpmedel är en räknare, formelsamling i matematisk statistisk utgiven av MAI, och ett ytterligare formel-blad (framsida och baksida).

(1) De två stokastiska variablerna X och Y är oberoende och likformigt fördelade på intervallet $(2,3)$.

(a) Bestäm den gemensamma (simultana) täthetsfunktionen $f(x,y)$ av (X,Y). (1p)

(b) Beräkna väntevärde och varians för X/Y. (2p)

<u>*Ledning:*</u> Använd formeln $E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\cdot f(x,y)\,dxdy$ för $g(x,y) = x/y$ och $g(x,y) = x^2/y^2$.

(2) Antag att sannolikheten att en godtyckligt vald person i Sverige kommer att träffas av blixten under det närmaste året är 10^{-7}.

(a) Om det finns 9 miljoner invånare i sverige, hur stor är då sannolikheten att minst tre personer kommer att träffas av blixten under det närmaste året? (1.5p)

(b) Om blixtnedslagen under de därpå följande tre åren är oberoende av dem under det närmaste året, hur stor är då sannolikheten att sammanlagt minst två personer kommer att träffas av blixten under de närmaste fyra åren? (1.5p)

<u>*Ledning:*</u> Om $X \sim Bin(n,p)$ så är X approximativt $Po(np)$-fördelad.

(3) År 2008 hade i Sverige 20% av befolkningen en årsinkomst som översteg 350.000 kronor och 10% av befolkningen hade en årsinkomst som översteg 550.000 kronor.

(a) Om man fick veta (2008) att en svensk person tjänade mer än 350.000 kronor om året, vad är sannolikheten att personen tjänade mer än 550.000 kronor? (1.5p)

(b) Bland svenska män hade 30% en årsinkomst som översteg 350.000 kronor. Antag att det bodde lika många kvinnor som män i Sverige. Om man fick veta att en svensk person tjänade mer än 350.000 kronor om året, vad är sannolikheten att det var en man? (1.5p)

(4) Anna antecknar hur lång tid det tar att cykla till jobbet olika dagar. Hon noterar tiderna $x_1,\dots,x_{30}$ (tur och retur) under 30 dagar och skattar väntevärdet $E[X_i] = 15.2$ minuter och standardavvikelsen $D(X_i) = \sqrt{Var(X_i)} = 2.4$ minuter, $i = 1,\dots,30$. Cykeltiderna kommer från en obekant fördelning. Bestäm approximativt sannolikheten att Anna behöver mindre än $30\cdot 15$ min $= 7.5$ h total tid för att

cykla till jobbet (tur och retur) under 30 dagar. Använd centrala gränsvärdessatsen. (3p)

(5) En person åker först med buss 1, sedan med buss 2. Väntetiderna X och Y är oberoende och likformigt fördelade över intervallet $(0, 10)$ respektive $(0, 8)$, där enheten är minuter. Bestäm sannolikheten att personen får vänta sammanlagt minst 16 minuter på de båda bussarna. (3p)

(6) En partikel utför en symmetrisk slumpvandring på hörnen av en kvadrat, så att den i varje steg, med lika sannolikhet, flyttar sig till något av de två intilliggande hörnen.

(a) Beskriv partikels slumpvandring som en Markovkedja, d.v.s. bestäm övergångsmatrisen. (1p)

(b) Bestäm väntevardet för antalet steg tills partikeln den första gången återkommer till starthörnet. (2p)

Lösningar

(1) (a) (X,Y) har den simultana täthetsfunktionen

$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in(2,3)^2 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

eftersom X och Y ät oberoende.
(b)

$$\begin{aligned} E[X/Y] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x/y\cdot f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_2^3\int_2^3 x/y\,dxdy = \int_2^3 x\,dx\cdot\int_2^3 1/y\,dy \\ &= (3^2/2-2^2/2)\cdot(\ln 3-\ln 2) = 2.5\cdot\ln 1.5 = 1.014\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[X^2/Y^2] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^2/y^2\cdot f(x,y)\,dxdy \\ &= \int_2^3\int_2^3 x^2/y^2\,dxdy = \int_2^3 x^2\,dx\cdot\int_2^3 1/y^2\,dy \\ &= (3^3/3-2^3/3)\cdot(-1/3+1/2) = 19/18 = 1.056\,. \end{aligned}$$

$$Var(X/Y) = 19/18 - 2.5^2\cdot(\ln 1.5)^2 = 0.028\,.$$

(2) Låt X vara antalet som träffas av blixten ett typiskt år. Då är

$$X\sim Bin(9\cdot 10^6, 10^{-7})\approx Po(0.9)\,.$$

(a)

$$P(X\geq 3) = 1-\sum_{k=0}^{2} P(X=k)\approx 1-e^{-0.9}(1+0.9+0.9^2/2) = 0.0629\,.$$

(b) Låt X_i vara antalet som träffas av blixten under år $i=1,2,3,4$ och låt $Y=\sum_{i=1}^4 X_i$. Då gäller att

$$Y\sim Bin(4\cdot 9\cdot 10^6, 10^{-7})\approx Po(3.6)\,.$$

Den sökta sannolikheten ges av

$$P(Y\geq 2) = 1-P(Y=0)-P(X=1)\approx 1-e^{-3.6}(1+3.6) = 0.8743\,.$$

(3) (a) Låt G beteckna händelsen att personens årsinkomst översteg 350.000 kronor och H händelsen att årsinkomsten översteg 550.000 kronor. Vi har då att $P(G)=0.2$ och $P(H)=0.1$. Sökt: $P(H|G)$. Eftersom $H\subseteq G$, så får vi

$$P(H|G) = \frac{P(G\cap H)}{P(G)} = \frac{P(H)}{P(G)} = \frac{0.1}{0.2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Låt M beteckna händelsen att personen är man. Vi har då att $P(M)=0.5$ och $P(G|M)=0.3$. Sökt: $P(M|G)$. Med hjälp av Bayes sats fås

$$P(M|G) = \frac{P(M\cap G)}{P(G)} = \frac{P(G|M)P(M)}{P(G)} = \frac{0.3\cdot 0.5}{0.2} = 0.75.$$

(4) Vi antar att Annas cykeltider $x_1, \ldots, x_{30}$ är oberoende observationer ur en fördelning med väntevärde $E[X]$ och varians $Var(X)$. Enligt centrala gränsvärdessatsen gäller approximativt att

$$X_1 + \ldots + X_{30} \sim N(30 \cdot E[X], (30 \cdot Var(X))^{\frac{1}{2}}).$$

Vi skattar $30 \cdot E[X] = 30 \cdot 15.2 = 456$ och $30 \cdot Var(X) = 30 \cdot 2.4^2 = 172.8 = 13.5^2$. Det betyder att

$$\begin{aligned} P(X_1 + \ldots + X_{30} < 450) &= P\left(\frac{X_1 + \ldots + X_{30} - 456}{13.5} < \frac{-6}{13.5}\right) \\ &\approx P\left(Z < -0.44\right) = 1 - \Phi(0.44) = 0.33 \end{aligned}$$

där $Z \sim N(0, 1)$.

(5) Se lösningar till lektionsuppgifter, 4.6.
`http://courses.mai.liu.se/GU/TAMS15/Dokument/blomsvar.pdf`

(6) (a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Låt X beteckna antalet steg tills första återkomsten och låt Y_i beteckna antalet återstående steg då partikeln befinner sig k sidor från startpunkten, $k = 1, 2$. Betingning ger

$$\begin{aligned} E[X] &= 1 + E[Y_1], \\ E[Y_1] &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + E[Y_2]), \\ E[Y_2] &= 1 + E[Y_1], \end{aligned}$$

så att

$$E[Y_1] = 3 \quad \text{och} \quad E[X] = 4.$$