Lösningsskiss för TAIU05, 2019-08-23

1. . Vi vill bestämma projektionen av P på linjen L. L kan skrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{OQ} + t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$, där $Q = (1, -2, 1)$ och $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi bildar $\overline{u} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ och beräknar $\overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Om närmaste punkt på linjen L heter R är alltså $\overline{OR} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$, dvs $R = (0, -5/2, -1/2)$. Avståndet mellan P och linjen L blir nu $||\overline{RP}|| = \frac{1}{2}||\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}|| = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

2. Vi bildar $\overline{v}_1 = \overline{P_0P_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_2 = \overline{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_3 = \overline{P_0P_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ a-2 \end{pmatrix}$. De fyra punkterna ligger i samma plan om $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ är linjärt beroende. Det inträffar om determinanten för den matris som har vektorerna som kolumner är 0. Eftersom $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = 20 - 5a = 5(4-a)$ ligger de fyra punkterna i samma plan om $a = 4$.

3. Sedvanlig kalkyl ger att $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -7 & -6 \\ -3 & 11 & 10 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ vilket dessutom bekräftas av en kontroll-multiplikation.

4. Ekvationen kan skrivas $A\overline{x} = \overline{b}$ där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eftersom $A^tA = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ blir normalekvationerna $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ vilket ger minsta kvadrat-lösningen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Vi vet också från teorin att den efterfrågade projektionen är $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. Vi beräknar $F(\overline{v}_1) = A\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $F(\overline{v}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(\overline{v}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$. Villkoret att $F(\overline{v}) = \lambda\overline{v}$ för något λ stämmer endast för $\overline{v}_2$ (med egenvärdet $\lambda = 1$). Vidare är $F(\overline{u}) = \begin{pmatrix} -3+a \\ 2a \\ 4+2a \end{pmatrix}$, och $\begin{pmatrix} -3+a \\ 2a \\ 4+2a \end{pmatrix}$ är en multipel av $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ precis när $a = -1$ (egenvärdet är då -2). Eftersom A är symmetrisk finns en ON-bas av egenvektorer och man måste därför kunna komplettera $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (dessa är ortogonala och de kan lätt normaliseras) med en vektor som är ortogonal mot bägge, exempelvis $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (jfr vad kryssprodukten ger). Vi ser också att $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, det vill säga $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ är verkligen en egenvektor (med egenvärde 4). En bas av egenvektorer är därför (till exempel) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

6. Systemet kan skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A och finner att karaktäristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$. Alltså är egenvärdena $\lambda = 3$ samt $\lambda = -3$. Som egenvektorer finner vi att vi kan välja $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 3) och $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (egenvärde -3). $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ bildar en bas för planet och sålunda vet vi att allmänna lösningen ges av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{3t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t},\ C_1,\ C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

   Villkoret $Y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ger ekvationen $C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket ger att $C_1 = 4/3, C_2 = 1/3$.

7. Eftersom $B = I - A$ följer att $A^2 + 2(I - A)^2 = I$ vilket förenklas till $3A^2 - 4A + I = 0$. Om vi skriver detta som $A(4I - 3A) = I$ så ser vi att A är inverterbar (med invers $4I - 3A$).