Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2019-08-23, kl 8 - 13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Vilken punkt på linjen $L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ är närmast punkten P=(-1,1,-1)? Vad är avståndet mellan punkten P och linjen L?

2. Bestäm a så att punkterna $P_0 = (1, -1, 2)$, $P_1 = (-1, 0, 3)$, $P_2 = (2, 1, 3)$ och $P_4 = (0, 2, a)$ ligger i samma plan.

3. Låt $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Beräkna A^{-1}. Redovisa en kontroll av att du verkligen fått fram inversen.

4. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} x + 2y & = -1 \\ x + y & = 4 \\ 2x + y & = 2 \end{cases}.$$
Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning. Ange projektionen av vektorn $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ på det plan genom origo som innehåller vektorerna $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

5. Låt F ha avbildningsmatris $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ och låt $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Beräkna $F(\overline{v}_1), F(\overline{v}_2), F(\overline{v}_3)$ och avgör vilken av $\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3$ som är en egenvektor. Låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Beräkna $F(\overline{u})$ och bestäm a så att $\overline{u}$ också blir en egenvektor. Ange slutligen en bas av egenvektorer till avbildningen F. Tips: Notera att A är symmetrisk.

6. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) & = y_1(t) + 4y_2(t) \\ y_2'(t) & = 2y_1(t) - y_2(t) \end{cases}.$$
Vilken lösning uppfyller $y_1(0) = 3, y_2(0) = 1$?

7. Antag att de kvadratiska matriserna A och B uppfyller $\begin{cases} A^2 + 2B^2 & = I \\ A + B & = I \end{cases}$. Visa att A måste vara inverterbar.