Lösningsskiss för TAIU05, 2019-06-10

1. Projektionsformeln ger direkt att $\overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}8\\1\\4\end{pmatrix}$, och på motsvarande sätt fås $\overline{v}_{\|\overline{u}} = \frac{9}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Vidare finner vi att $\overline{u}\times\overline{v} = \begin{pmatrix}4\\-4\\-7\end{pmatrix}$. Slutligen ger definitionen av skalärprodukt att $\overline{u}\cdot\overline{v} = |\overline{u}||\overline{v}|\cos\alpha$ där α är sökt vinkel. Vi finner att $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och eftersom $0\le\alpha\le\pi$ betyder det att $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Vi kan bilda ekvationen $A\overline{x} = \overline{b}$, där $A = \begin{pmatrix}1&a\\a&4\end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix}2\\a^2\end{pmatrix}$. Vi vet att ekvationen har en entydig lösning om $\det(A)\neq 0$, och eftersom $\det(A) = 4-a^2$ betyder det att vi har en lösning om $a\neq\pm 2$. $a=-2$ ger ekvationen $\begin{cases}x-2y=2\\-2x+4y=4\end{cases}$ dvs $\begin{cases}x-2y=2\\x-2y=-2\end{cases}$, vilket är en ekvation som saknar lösningar. $a=2$ ger $\begin{cases}x+2y=2\\2x+4y=4\end{cases}$ $\Leftrightarrow x+2y=2$. Denna ekvation har oändligt många lösningar (parameterlösning) och dessa kan skrivas till exempel $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}, t\in\mathbf{R}$.

3. Ekvationen kan skrivas $(A-A^2)X = C-B$, och om $A-A^2$ är inverterbar så är lösningen $X = (A-A^2)^{-1}(C-B)$. Vi finner att $A^2 = \begin{pmatrix}2&-8\\4&2\end{pmatrix}$ så att $A-A^2 = \begin{pmatrix}0&6\\-3&0\end{pmatrix}$. Denna matris är inverterbar med invers $\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}$. Eftersom $C-B = \begin{pmatrix}-2&4\\-5&3\end{pmatrix}$ finner vi att $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&-2\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&4\\-5&3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5&-3\\-1&2\end{pmatrix}$.

4. Vi bildar karaktäristiska polynomet $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}3-\lambda&2&-1\\-1&-\lambda&1\\6&6&-1-\lambda\end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$. Vi söker egenvärdem dvs rötter till ekvationen $p(\lambda)=0$. Prövning ger till exempel att $p(1)=0$ varvid faktorisering ger att $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$. Egenvärdena är alltså $\lambda=1$, $\lambda=2$ samt $\lambda=-1$. Genom att lösa sedvanliga ekvationssystem finner vi att egenvektorerna är (standardbeteckningar) $\overline{v} = t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, t\in\mathbf{R}, t\neq 0$ för egenvärde $\lambda=1$; $\overline{v} = t\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, t\in\mathbf{R}, t\neq 0$ till egenvärde $\lambda=2$ samt $\overline{v} = t\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, t\in\mathbf{R}, t\neq 0$ om egenvärdet $\lambda=-1$.

5. Som en normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$. Spegling i planet innebär att $F(\overline{u}) = \overline{u} - 2\frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}$, och den avbildningsmatris (A säg) vi söker har $F(\overline{e}_1)$, $F(\overline{e}_2)$ samt $F(\overline{e}_3)$ som kolumner. Vi skall alltså räkna ut
$$F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - 2\frac{\overline{e}_i\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}, \quad i=1,2,3.$$
Vi finner att $F(\overline{e}_1) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}19\\-4\\8\end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}-4\\13\\16\end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}8\\16\\-11\end{pmatrix}$. så att avbildningsmatrisen blir $A = \frac{1}{21}\begin{pmatrix}19&-4&8\\-4&13&16\\8&16&-11\end{pmatrix}$. En vektor parallell med planet skall avbildas på sig själv. Att en vektor är parallell med innebär att den är ortogonal mot $\overline{n}$, och vi kan till exempel välja vektorn $\overline{u} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$. Vi ser också att $\frac{1}{21}\begin{pmatrix}19&-4&8\\-4&13&16\\8&16&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$.

6. Eftersom $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ inte är parallella bildar de en bas för planet. Antag att $\overline{u}$ har koordinaterna $X = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ i basen $\underline{e}$ och koordinaterna Y i basen $\underline{f}$, det vill säga $\overline{u} = \underline{e}X = \underline{f}Y$. Vi söker Y. Bassambandet är $\underline{f} = \underline{e}T$, där $T = \begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$ och vi vet (eller härleder) att $Y = T^{-1}X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$. Från teorin vet vi också (eller härleder!) att sökt avbildningsmatris $A_{\underline{f}} = T^{-1}A_{\underline{e}}T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&11\end{pmatrix}$.

7. Det är givet att $F(\begin{pmatrix}t+1\\2-t\end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix})+tF(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ för alla $t\in\mathbf{R}$. Det innebär att $F(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ och sålunda att $F(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Att $F(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ innebär att alla vektorer på formen $s\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $s\in\mathbf{R}$ avbildas på nollvektorn. Fler kan det inte vara, ty då skulle lösningsmängden till ekvationen i uppgiften vara större. $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ är inte parallella, så en godtycklig vektor $\overline{u}$ kan skrivas $\overline{u} = \alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ för några α,β. Vi ser att $F(\overline{u}) = F(\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \alpha F(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix})+\beta F(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = \beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Alltså finns det $\overline{u}$ så att $F(\overline{u}) = \overline{v}$ om $\overline{v} = \beta\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \beta\in\mathbf{R}$.