Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2019-06-10, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Låt $\overline{u} = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\overline{v} = \left(\begin{smallmatrix}8\\1\\4\end{smallmatrix}\right)$. Bestäm projektionen av $\overline{u}$ på $\overline{v}$ samt projektionen av $\overline{v}$ på $\overline{u}$. Bestäm även $\overline{u} \times \overline{v}$ samt vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

2. Bestäm för varje a antal lösningar till ekvationen
$$\begin{cases} x + ay = 2 \\ ax + 4y = a^2. \end{cases}$$
Ange alla lösningarna för den/de a där det finns parameterlösning.

3. Lös matrisekvationen
$$AX + B = A^2X + C$$
där $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Bestäm egenvärden och egenvektorer till den linjära avbildningen F med avbildningsmatris
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. F är den linjära avbilding $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som beskriver spegling i planet $x + 2y - 4z = 0$. Ange F:s avbildningsmatris (i standardbasen). Kontrollera att en vektor parallell med planet avbildas som den ska.

6. Låt $\overline{f}_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)$, $\overline{f}_2 = \left(\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right)$. Varför är $\underline{f} = (\overline{f}_1 \ \overline{f}_2)$ en bas för planet? Antag att vektorn $\overline{u} = \left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)$ i standardbasen, dvs $\overline{u} = \underline{e}\left(\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right)$, där $\underline{e} = (\overline{e}_1 \ \overline{e}_2)$. Vad är koordinaterna för $\overline{u}$ i basen $\underline{f}$? Antag att den linjära avbildningen F har avbildningsmatrisen $A = A_{\underline{e}} = \left(\begin{smallmatrix}3 & -1\\-2 & 1\end{smallmatrix}\right)$ i basen $\underline{e}$. Vad är F:s avbildningsmatris i basen $\underline{f}$?

7. Låt F vara en linjär avbildning $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, och anta att lösningen till ekvationen $F(\overline{u}) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ är $\overline{u} = \left(\begin{smallmatrix}t+1\\2-t\end{smallmatrix}\right), t \in \mathbf{R}$. Ange vilka vektorer $\overline{v}$ som avbildas på nollvektorn $\overline{0}$. Ange också för vilka vektorer $\overline{v}$ det finns vektorer $\overline{u}$ så att $F(\overline{u}) = \overline{v}$.

Lösningsskiss för TAIU05, 2019-06-10

1. Projektionsformeln ger direkt att $\overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$, och på motsvarande sätt fås $\overline{v}_{\|\overline{u}} = \frac{9}{2}\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$. Vidare finner vi att $\overline{u}\times\overline{v} = \begin{pmatrix} 4\\ -4\\ -7\end{pmatrix}$. Slutligen ger definitionen av skalärprodukt att $\overline{u}\cdot\overline{v} = |\overline{u}||\overline{v}|\cos\alpha$ där α är sökt vinkel. Vi finner att $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och eftersom $0 \le \alpha \le \pi$ betyder det att $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Vi kan bilda ekvationen $A\overline{x} = \overline{b}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & a\\ a & 4\end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2\\ a^2\end{pmatrix}$. Vi vet att ekvationen har en entydig lösning om $\det(A) \neq 0$, och eftersom $\det(A) = 4-a^2$ betyder det att vi har en lösning om $a \neq \pm 2$. $a = -2$ ger ekvationen $\begin{cases} x-2y=2\\ -2x+4y=4\end{cases}$ dvs $\begin{cases} x-2y=2\\ x-2y=-2\end{cases}$, vilket är en ekvation som saknar lösningar. $a = 2$ ger $\begin{cases} x+2y=2\\ 2x+4y=4\end{cases}$ $\Leftrightarrow x+2y=2$. Denna ekvation har oändligt många lösningar (parameterlösning) och dessa kan skrivas till exempel $\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2\\ 1\end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.

3. Ekvationen kan skrivas $(A-A^2)X = C-B$, och om $A-A^2$ är inverterbar så är lösningen $X = (A-A^2)^{-1}(C-B)$. Vi finner att $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -8\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ så att $A - A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6\\ -3 & 0\end{pmatrix}$. Denna matris är inverterbar med invers $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Eftersom $C-B = \begin{pmatrix} -2 & 4\\ -5 & 3\end{pmatrix}$ finner vi att $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 4\\ -5 & 3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

4. Vi bildar karaktäristiska polynomet $p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & -1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 6 & 6 & -1-\lambda\end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$. Vi söker egenvärdem dvs rötter till ekvationen $p(\lambda) = 0$. Prövning ger till exempel att $p(1) = 0$ varvid faktorisering ger att $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$. Egenvärdena är alltså $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ samt $\lambda = -1$. Genom att lösa sedvanliga ekvationssystem finner vi att egenvektorerna är (standardbeteckningar) $\overline{v} = t\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, t \neq 0$ för egenvärde $\lambda = 1$; $\overline{v} = t\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 2\end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, t \neq 0$ till egenvärde $\lambda = 2$ samt $\overline{v} = t\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 2\end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, t \neq 0$ om egenvärdet $\lambda = -1$.

5. Som en normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -4\end{pmatrix}$. Spegling i planet innebär att $F(\overline{u}) = \overline{u} - 2\frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}$, och den avbildningsmatris (A säg) vi söker har $F(\overline{e}_1)$, $F(\overline{e}_2)$ samt $F(\overline{e}_3)$ som kolumner. Vi skall alltså räkna ut
$$F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - 2\frac{\overline{e}_i\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}, \quad i = 1,2,3.$$
Vi finner att $F(\overline{e}_1) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 19\\ -4\\ 8\end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} -4\\ 13\\ 16\end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 8\\ 16\\ -11\end{pmatrix}$. så att avbildningsmatrisen blir $A = \frac{1}{21}\begin{pmatrix} 19 & -4 & 8\\ -4 & 13 & 16\\ 8 & 16 & -11\end{pmatrix}$. En vektor parallell med planet skall avbildas på sig själv. Att en vektor är parallell med innebär att den är ortogonal mot $\overline{n}$, och vi kan till exempel välja vektorn $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$. Vi ser också att $\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 19 & -4 & 8\\ -4 & 13 & 16\\ 8 & 16 & -11\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.

6. Eftersom $\overline{f}_1$ och $\overline{f}_2$ inte är parallella bildar de en bas för planet. Antag att $\overline{u}$ har koordinaterna $X = \begin{pmatrix} 2\\ 3\end{pmatrix}$ i basen $\underline{e}$ och koordinaterna Y i basen $\underline{f}$, det vill säga $\overline{u} = \underline{e}X = \underline{f}Y$. Vi söker Y. Bassambandet är $\underline{f} = \underline{e}T$, där $T = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ och vi vet (eller härleder) att $Y = T^{-1}X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\ 3\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5\\ -1\end{pmatrix}$. Från teorin vet vi också (eller härleder!) att sökt avbildningsmatris $A_{\underline{f}} = T^{-1}A_{\underline{e}}T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1\\ -2 & 11\end{pmatrix}$.

7. Det är givet att $F(\begin{pmatrix} t+1\\ 2-t\end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}) + tF(\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$ för alla $t \in \mathbf{R}$. Det innebär att $F(\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$ och sålunda att $F(\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$. Att $F(\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$ innebär att alla vektorer på formen $s\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}$, $s \in \mathbf{R}$ avbildas på nollvektorn. Fler kan det inte vara, ty då skulle lösningsmängden till ekvationen i uppgiften vara större. $\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}$ och $\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}$ är inte parallella, så en godtycklig vektor $\overline{u}$ kan skrivas $\overline{u} = \alpha\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}$ för några α, β. Vi ser att $F(\overline{u}) = F(\alpha\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}) = \alpha F(\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix}) + \beta F(\begin{pmatrix} 1\\ 2\end{pmatrix}) = \beta\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}$. Alltså finns det $\overline{u}$ så att $F(\overline{u}) = \overline{v}$ om $\overline{v} = \beta\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix}, \beta \in \mathbf{R}$.