

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2018-08-24, kl 8 - 13.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas \bar{e}_1, \bar{e}_2 för planet (\mathbf{R}^2) eller $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (\mathbf{R}^3).

1. Linjen L går genom punkterna $P_0 = (-1, 2, 3)$ och $P_1 = (1, 2, -1)$. Vilken punkt på linjen L ligger närmast punkten $P = (-2, 1, 0)$? Vad är avståndet mellan punkten P och linjen L ?
2. Lös matrisekvationen

$$A^2X - B = BX + A,$$

där $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Ange för vilka a som ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x + 6y = 3 \\ ax + a^2y = 2 \end{cases}$$

är entydigt lösbart. Bestäm för *övriga* värden på parametern a systemets lösningar.

4. Ange samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm också en diagonalmatris D och en matris T sådana att $A = TDT^{-1}$.

5. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver projektion på den räta linje som går genom punkterna $(0, 0, 0)$ och $(-2, 1, -3)$. Bestäm F 's avbildningsmatris A . Förslå en lämplig kontroll av avbildningsmatrisen, och utför denna.
6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -7y_1(t) - 5y_2(t) \\ y_2'(t) = 10y_1(t) + 8y_2(t). \end{cases}$$

Ange speciellt den lösning $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ som uppfyller $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Låt G och H vara linjära avbildningar $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Uttryckt i standardkoordinater (x, y) för planet så beskriver G spegling i x -axeln och H spegling i linjen $x = y$. Visa att den sammansatta avbildningen $F = G \circ H$ (så att $F(\bar{v}) = G(H(\bar{v}))$) beskriver en vridning i planet. Hur stor är vridningsvinkeln?