Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2018-08-24, kl 8 - 13.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet ($\mathbf{R}^2$) eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet ($\mathbf{R}^3$).

1. Linjen L går genom punkterna $P_0 = (-1, 2, 3)$ och $P_1 = (1, 2, -1)$. Vilken punkt på linjen L ligger närmast punkten $P = (-2, 1, 0)$? Vad är avståndet mellan punkten P och linjen L?

2. Lös matrisekvationen
$$A^2X - B = BX + A,$$
där $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ och $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Ange för vilka a som ekvationssystemet
$$\begin{cases} 3x + 6y &= 3 \\ ax + a^2y &= 2 \end{cases}$$
är entydigt lösbart. Bestäm för *övriga* värden på parametern a systemets lösningar.

4. Ange samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm också en diagonalmatris D och en matris T sådana att $A = TDT^{-1}$.

5. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver projektion på den räta linje som går genom punkterna $(0, 0, 0)$ och $(-2, 1, -3)$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Förslå en lämplig kontroll av avbildningsmatrisen, och utför denna.

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) = -7y_1(t) - 5y_2(t) \\ y_2'(t) = 10y_1(t) + 8y_2(t). \end{cases}$$
Ange speciellt den lösning $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ som uppfyller $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7. Låt G och H vara linjära avbildningar $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Uttryckt i standardkoordinater (x, y) för planet så beskriver G spegling i $x-$axeln och H spegling i linjen $x = y$. Visa att den sammansatta avbildningen $F = G \circ H$ (så att $F(\overline{v})) = G(H(\overline{v})))$ beskriver en vridning i planet. Hur stor är vridningsvinkeln?

Lösningsskiss för TAIU05, 2018-08-24

1. Linjen kan skrivas L: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$, där $\overline{v} = \overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$. Vi bildar vektorn $\overline{u} = \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ och projicerar $\overline{u}$ på linjen L, dvs riktningsvektorn $\overline{v}$. Vi finner att $\overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v} = \frac{1}{2}\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Om Q är närmaste punkten blir ortsvektorn $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP_0} + \overline{u}_{\|\overline{v}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Närmaste punkten är alltså $Q = (0, 2, 1)$. Eftersom $\overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ är minsta avståndet $||\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}|| = \sqrt{6}$.

2. Vi kan skriva ekvationen $(A^2 - B)X = A + B$, och om $A^2 - B$ är inverterbar så är alltså $X = (A^2 - B)^{-1}(A + B)$. Vi finner att $A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ så att $A^2 - B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ samt $A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Slutligen blir (eftersom $A^2 - B$ visar sig vara inverterbar) $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Om vi skriver systemet $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ där$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ a & a^2 \end{pmatrix}$ så vet vi att systemet är entydigt lösbart om $\det(A) = 3a^2 - 6a = 3a(a - 2) \neq 0$, det vill säga om $a \neq 0$ och $a \neq 2$. $a = 0$ ger systemet $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \\ x\ y \end{array}$, som saknar lösning. $a = 2$ ger systemet $\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 6 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \\ x\ y \end{array} \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ x\ y \end{array}$, med lösning $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.

4. Vi söker egenvärdena genom att hitta nollställen till karaktäristiska polynomet: $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \ldots = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = -\lambda(\lambda - 1)^2$, det vill säga egenvärdena är 0 och 1 (dubbelrot). Genom att lösa $(A - \lambda I)\overline{x} = \overline{0}$ för de bägge egenvärdena (och tänka på att nollvektorn inte räknas som egenvektor) finner vi att alla egenvektorer till $\lambda = 0$ ges av $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, t \neq 0$. Egenvektorerna till $\lambda = 1$ ges $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R}, (t, s) \neq (0, 0)$. Från teorin för diagonalisering vet vi att om vi bildar T med en bas av egenvektorer som kolumner, till exempel $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ så gäller att $A = TDT^{-1}$ där D är diagonalmatrisen som har egenvärdena (i rätt ordning) på diagonalen, dvs $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Linjen kan beskrivas L: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. För ett allmänt $\overline{u}$ ges projektionen av $\overline{u}$ på linjen av projektionsformlen, dvs $F(\overline{u}) = \frac{\overline{u}\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v}$. Vidare ges F:s avbildningsmatris A av $(F(\overline{e}_1)\, F(\overline{e}_2)\, F(\overline{e}_3))$, dvs A:s kolumner består av i tur och ordning $F(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$, dvs $F(\overline{e}_i) = \frac{\overline{e}_i\cdot\overline{v}}{\overline{v}\cdot\overline{v}}\overline{v}, \quad i = 1, 2, 3$. Dessa vektorer blir $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix}$, vilket innebär att $A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. En lämplig kontroll kan vara att kolla att $F(\overline{v}) = \overline{v}$. Vi finner också att $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

6. Systemet kan skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$, och vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Karaktäristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$ så egenvärdena är $\lambda = 3$ samt $\lambda = -2$.

   Sedvanliga räkningar ger att vi som egenvektorer kan välja $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (egenvärde 3) och $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (egenvärde -2). $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ bildar en bas för planet och sålunda vet vi att allmänna lösningen ges av

   $$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{3t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t},\ C_1,\, C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

   Villkoret $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ger ekvationen $C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket ger att $C_1 = -2, C_2 = 3$.

7. Vi vet att en vridning θ (moturs) i planet har avbildningsmatris $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. För att bestämma F:s avbildningsmatris söker vi $F(\overline{e}_1)$ och $F(\overline{e}_2)$. Vi finner $F(\overline{e}_1) = G(H(\overline{e}_1)) = G(\overline{e}_2) = -\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ samt $F(\overline{e}_2) = G(H(\overline{e}_2)) = G(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alltså blir avbildningsmatrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ vilket beskriver en rotation ett kvarts varv medurs (och eventuellt ett antal hela varv dessutom).