Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2018-06-04, kl 14 - 19.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet ($\mathbf{R}^2$) eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet ($\mathbf{R}^3$).

1. Låt Π vara planet $x + y - 2z = 4$ och låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dela upp $\overline{u} = \overline{u}_\perp + \overline{u}_\parallel$ där $\overline{u}_\perp$ är ortogonal mot planet Π och $\overline{u}_\parallel$ är parallell med planet Π.

2. $\underline{f} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3)$, där $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, är en bas för $\mathbf{R}^3$. Bestäm koordinaterna för $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ i basen $\underline{f}$.

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Lös matrisekvationen
$$ABX = E - CDX.$$

4. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver spegling i planet $x + 2y + 3z = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Kontrollera att en normalvektor till planet avbildas korrekt.

5. Låt $A = A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{pmatrix}$. Visa att $\det(A)$ är oberoende av x. Det visar sig att för ett visst x blir inversen till A lika med $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Vilket x då?

6. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - y_2(t) + y_3(t) \\ y_2'(t) = 2y_1(t) + 6y_3(t) \\ y_3'(t) = y_2(t) \end{cases}.$$
Vilka lösningar är begränsade då $t \to \infty$?

7. Antag att den linjära avbildningen $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ har avbildningsmatrisen $A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ i standardbasen $\underline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2)$. Basen $\underline{f} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2)$ är basen $\underline{e}$ vriden en vinkel θ (i positiv led), $0 \leq \theta < 2\pi$. Vektorn $\overline{u}$ är en egenvektor till F med egenvärde 0, och man vet att $\overline{u}$ i basen $\underline{f}$ har koordinaterna $X_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vilka värden kan θ ha?

Lösningsskiss för TAIU05, 2018-06-04

1. En normalvektor till planet är $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, och eftersom $\overline{u}_{\perp} = \overline{u}_{\|\overline{n}}$ blir $\overline{u}_{\perp} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n} = -\frac{1}{2}\overline{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ur det får vi att $\overline{u}_{\|} = \overline{u} - \overline{u}_{\perp} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Kalla koordinaterna för x_1, x_2, x_3. Vi skall bestämma dessa så att $x_1\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2 + x_3\overline{f}_3 = \overline{u}$, det vill säga $x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vi skall sålunda lösa ekvationen

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ -2 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right), \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$$

vilken visar sig ha lösningen $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$.

3. Vi skriver först om ekvationen: $ABX = E - CDX \Leftrightarrow ABX + CDX = E \Leftrightarrow (AB + CD)X = E$. Om $AB + CD$ är inverterbar har vi alltså lösningen $X = (AB + CD)^{-1}E$. Vi räknar ut $AB = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ så att ekvationen blir $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Nu ser vi att $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ är inverterbar och att $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Alltså blir $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. För ett allmänt $\overline{u}$ får vi speglingen av $\overline{u}$ i planet om vi från $\overline{u}$ subtraherar 2 gånger $\overline{u}$:s projektion på en normalvektor till planet, det vill säga $F(\overline{u}) = \overline{u} - 2\frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}$. Som normalvektor kan vi ta till exempel $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vidare ges $F:s$ avbildningsmatris A av $(F(\overline{e}_1)\, F(\overline{e}_2)\, F(\overline{e}_3))$, dvs A:s kolumner består av i tur och ordning $F(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$, dvs

$$F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - 2\frac{\overline{e}_i \cdot \overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Dessa vektorer blir $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$,$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$, vilket innebär att $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. En normalvektor skall avbildas på minus sig själv. Vi finner också att $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

5. En direkt uträkning visar att $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{vmatrix} = -2(3-x)+12-4(x+1)+2(x+1) = 4$ som inte beror på x. En matris gånger sin invers (i valfri ordning) skall ge enhetsmatrisen. Vi räknar ut produkten: $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 8 & -4 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & x+1 \\ x+1 & 2 & 3-x \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8-2x & 0 & 4(x-3) \\ 5(x-3) & 2 & -9(x-3) \\ 3-x & 0 & 2(x-2) \end{pmatrix}$ vilket blir enhetsmatrisen precis när $x = 3$.

6. Systemet kan skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, och vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Karaktäristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = -(\lambda - 2)(\lambda - 1)(\lambda + 2)$, så rötterna/egenvärdena är $2, 1$ och -2.

   Sedvanliga räkningar ger att vi som egenvektorer kan välja $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 2) , $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (egenvärde 1) och $\overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (egenvärde -2). $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3\}$ bildar en bas för planet (tre skilda egenvärden) och sålunda vet vi att allmänna lösningen ges av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t} + C_2\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}e^{t} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t},\ C_1,\, C_2,\, C_3 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

   De lösningar som är begränsade då $t \to \infty$ karakteriseras av att $C_1 = C_2 = 0$.

7. Antag att basen $\underline{f}$ är vriden vinkeln θ relative basen $\underline{e}$. Det innebär att $\underline{f} = \underline{e}T$ där $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. Om koordinaterna i standardbasen $\underline{e}$ betecknas med $X_{\underline{e}}$ har vi att $\overline{u} = \underline{e}X_{\underline{e}} = \underline{f} = \underline{e}TX_{\underline{f}}$, dvs $X_{\underline{e}} = TX_{\underline{f}}$. Eftersom $\overline{u}$ är en egenvektor med egenvärde 0, så följer att $\overline{0} = A_{\underline{e}}X_{\underline{e}} = A_{\underline{e}}TX_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots = 5(\cos\theta + \sin\theta)\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alltså är $\cos\theta + \sin\theta = 0$, och om $0 \leq \theta < 2\pi$ så innebär det att $\theta = \frac{3\pi}{4}$ eller $\theta = \frac{7\pi}{4}$.