Lösningsskiss för TAIU05, 2018-03-15

1. Eftersom planet Π är ortogonalt mot linjen, så blir riktningsvektorn $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en normalvektor till planet. Planets ekvation är alltså $3x - y + 2z = D$ för något D. Genom att stoppa in punkten $(1, 2, -3)$ finner vi att $D = -5$, så planets ekvation är $3x - y + 2z = -5$. Avståndet från origo till planet kan fås till exempel genom att följa linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ (som alltså har planets normalvektor som riktningsvektor) och se var den skär planet. Insättning ger att det sker för $t = -\frac{5}{14}$, och avståndet blir därför $|| - \frac{5}{14}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}|| = \frac{5}{14}||\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}|| = \frac{5}{\sqrt{14}}$.

2. En vektor som är ortogonal mot $\overline{f}_1$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fås till exempel med kryssprodukt: $\overline{f}_1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och normering ger $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overline{f}_3$ ges av ännu en kryssprodukt: $\overline{f}_3 = \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Notera att $\overline{f}_3$ redan har längd 1. Man kontrollerar sedan att $\overline{f}_1 \cdot \overline{f}_1 = \overline{f}_2 \cdot \overline{f}_2 = \overline{f}_3 \cdot \overline{f}_3 = 1$ och att $\overline{f}_1 \cdot \overline{f}_2 = \overline{f}_2 \cdot \overline{f}_3 = \overline{f}_3 \cdot \overline{f}_1 = 0$.

3. Att C är inverterbar följer av att $\det(C) = 2 \neq 0$, och vi finner att $C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi skriver om ekvationen: $(A - B)X = C^{-1} - C$, så att lösningen blir $X = (A - B)^{-1}(C^{-1} - C)$, i vart fall om $A - B$ är inverterbar. Men så är fallet, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, med invers $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vidare är $C^{-1} - C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, så vi finner att $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Till exempel ekvation 1 och 3 tillsammans ger $x = 14, y = 0$, vilket inte stämmer i övriga ekvationer. Systemet saknar alltså lösning. Med $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$, har vi alltså det olösbara systemet $A\overline{x} = \overline{b}$. Minsta kvadrat-lösningen är lösningen till normalekvationerna $A^t A\overline{x} = A^t\overline{b}$ vilket ger ekvationen $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \end{pmatrix}$. Ur detta finner vi minsta kvadrat-lösningen $x = 3, y = -1$.

5. Vi kan skriva systemet som $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, och vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Karaktäristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$, så rötterna/egenvärdena är -3 och 2. En liten kalkyl visar att vi kan välja tillhörande egenvektorer $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (egenvärde -3) och $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 2).

   $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ bildar en bas för planet och sålunda vet vi att allmänna lösningen ges av
   $$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-3t} + C_2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t},\ C_1,\ C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$
   $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ger $C_1 = -1, C_2 = 1$, vilket motsvarar lösningen $Y(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-3t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$.

6. Avbildningsmatrisen har $F(\overline{e}_1), F(\overline{e}_2), F(\overline{e}_3)$ som kolumner, så vi behöver bestämma dessa. Vi bestämmer först vad $F(\overline{u})$ blir för en allmän vektor $\overline{u}$. En normalvektor till planet är $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Om vi delar upp $\overline{u} = \overline{u}_{\|} + \overline{u}_{\perp}$ där $\|$ här betyder parallell med planet, och $\perp$ ortogonal mot planet, så blir $F(\overline{u}) = \overline{u}_{\|}$. Vidare blir även $\overline{u}_{\perp} = \overline{u}_{\|\overline{n}}$, dvs projektionen av $\overline{u}$ på $\overline{n}$. Sålunda: $F(\overline{u}) = \overline{u}_{\|} = \overline{u} - \overline{u}_{\perp} = \overline{u} - \overline{u}_{\|\overline{n}} = \overline{u} - \frac{\overline{u} \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}$. Alltså, $F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - \frac{\overline{e}_i \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}, i = 1, 2, 3$. Vi räknar ut dessa tre vektorer och skriver som kolumner i avbildningsmatrisen A, vilken då blir $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En vektor med egenvärde noll blir en vektor som avbildas på nollvektorn, vilket gäller för multiplar av normalvektorn $\overline{n}$. Ett exempel är alltså just $\overline{n}$.

7. Uppgiften kan lösas med basbytesresonemag, men vi kan också sammanfatta informationen som $A\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Här finns också ett par varianter, tex att beräkna A^{-1} och multiplicera från vänster. Vi kan också transponera och betrakta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Genom att sätta upp och lösa $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 6 & 3 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -5 \end{array}\right)$ kan vi avläsa A^t. Det innebär att $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 12 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.