Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2018-03-15, kl 14 - 19.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet ($\mathbf{R}^2$) eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet ($\mathbf{R}^3$).

1. Låt Π vara det plan som innehåller punkten $(1, 2, -3)$ och som är ortogonalt mot linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Bestäm planets ekvation på normalform. Vad är avståndet till planet från origo?

2. Sätt $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och låt $\overline{f}_2$ vara en enhetsvektor som är ortogonal mot $\overline{f}_1$ och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Komplettera med en vektor $\overline{f}_3$ så att $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ bildar en ON-bas. Redovisa din kontroll av att du verkligen har en ON-bas.

3. Låt
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Visa att C är inverterbar, och lös matrisekvationen
$$AX + C = C^{-1} + BX.$$

4. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} x - 2y = 14 \\ x - y = 2 \\ x + 2y = 14 \\ 2x + y = -5 \end{cases}.$$
Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.

5. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) = \phantom{y_1(t) -{}} 6y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t). \end{cases}$$
Ange speciellt den lösning $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ där $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver projektionen på planet $x - 3z = 0$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Ange en egenvektor med egenvärde 0.

7. Antag att $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\overline{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till den linjära avbildningen F, så att $F(\overline{v}_1) = \overline{v}_1, F(\overline{v}_2) = 2\overline{v}_2, F(\overline{v}_3) = 3\overline{v}_3$. Bestäm $F : s$ avbildningsmatris A.