

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2018-03-15, kl 14 - 19.

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas \bar{e}_1, \bar{e}_2 för planet (\mathbf{R}^2) eller $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet (\mathbf{R}^3).

1. Låt Π vara det plan som innehåller punkten $(1, 2, -3)$ och som är ortogonalt mot linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -9 \\ -8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Bestäm planets ekvation på normalform. Vad är avståndet till planet från origo?
2. Sätt $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ och låt \bar{f}_2 vara en enhetsvektor som är ortogonal mot \bar{f}_1 och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Komplettera med en vektor \bar{f}_3 så att $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$ bildar en ON-bas. Redovisa din kontroll av att du verkligen har en ON-bas.

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att C är inverterbar, och lös matrisekvationen

$$AX + C = C^{-1} + BX.$$

4. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 2y = 14 \\ x - y = 2 \\ x + 2y = 14 \\ 2x + y = -5 \end{cases}.$$

Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.

5. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} y_1'(t) = 6y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) - y_2(t). \end{cases}$$

Ange speciellt den lösning $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ där $Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

6. Låt F vara den linjära avbildning som beskriver projektionen på planet $x - 3z = 0$. Bestäm F 's avbildningsmatris A . Ange en egenvektor med egenvärde 0.
7. Antag att $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ och $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ är egenvektorer till den linjära avbildningen F , så att $F(\bar{v}_1) = \bar{v}_1, F(\bar{v}_2) = 2\bar{v}_2, F(\bar{v}_3) = 3\bar{v}_3$. Bestäm F 's avbildningsmatris A .

Lösningsskiss för TAIU05, 2018-03-15

- Eftersom planet Π är ortogonalt mot linjen, så blir riktningsvektorn $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en normalvektor till planet. Planets ekvation är alltså $3x - y + 2z = D$ för något D . Genom att stoppa in punkten $(1, 2, -3)$ finner vi att $D = -5$, så planets ekvation är $3x - y + 2z = -5$. Avståndet från origo till planet kan fås till exempel genom att följa linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ (som alltså har planets normalvektor som riktningsvektor) och se var den skär planet. Insättning ger att det sker för $t = -\frac{5}{14}$, och avståndet blir därför $\| -\frac{5}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \frac{5}{14} \| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \| = \frac{5}{\sqrt{14}}$.
- En vektor som är ortogonal mot \bar{f}_1 och $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ fås till exempel med kryssprodukt: $\bar{f}_1 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, och normering ger $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. \bar{f}_3 ges av ännu en kryssprodukt: $\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Notera att \bar{f}_3 redan har längd 1. Man kontrollerar sedan att $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1 = \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2 = \bar{f}_3 \cdot \bar{f}_3 = 1$ och att $\bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 = \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_3 = \bar{f}_3 \cdot \bar{f}_1 = 0$.
- Att C är inverterbar följer av att $\det(C) = 2 \neq 0$, och vi finner att $C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Vi skriver om ekvationen: $(A - B)X = C^{-1} - C$, så att lösningen blir $X = (A - B)^{-1}(C^{-1} - C)$, i vart fall om $A - B$ är inverterbar. Men så är fallet, $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, med invers $(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Vidare är $C^{-1} - C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$, så vi finner att $X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -7 & -9 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
- Till exempel ekvation 1 och 3 tillsammans ger $x = 14, y = 0$, vilket inte stämmer i övriga ekvationer. Systemet saknar alltså lösning. Med $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\bar{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix}$, har vi alltså det olösbara systemet $A\bar{x} = \bar{b}$. Minsta kvadrat-lösningen är lösningen till normalekvationerna $A^t A \bar{x} = A^t \bar{b}$ vilket ger ekvationen $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -7 \end{pmatrix}$. Ur detta finner vi minsta kvadrat-lösningen $x = 3, y = -1$.
- Vi kan skriva systemet som $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, och vi söker egenvärden och egenvektorer till A . Karakteristiska ekvationen är $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$, så rötterna/egenvärdena är -3 och 2 . En liten kalkyl visar att vi kan välja tillhörande egenvektorer $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ (egenvärde -3) och $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (egenvärde 2).
 $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ bildar en bas för planet och sålunda vet vi att allmänna lösningen ges av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad C_1, C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ ger } C_1 = -1, C_2 = 1, \text{ vilket motsvarar lösningen } Y(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

- Avbildningsmatrisen har $F(\bar{e}_1), F(\bar{e}_2), F(\bar{e}_3)$ som kolumner, så vi behöver bestämma dessa. Vi bestämmer först vad $F(\bar{u})$ blir för en allmän vektor \bar{u} . En normalvektor till planet är $\bar{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Om vi delar upp $\bar{u} = \bar{u}_{\parallel} + \bar{u}_{\perp}$ där \parallel här betyder parallell med planet, och \perp ortogonal mot planet, så blir $F(\bar{u}) = \bar{u}_{\parallel}$. Vidare blir även $\bar{u}_{\perp} = \bar{u}_{\parallel} \bar{n}$, dvs projektionen av \bar{u} på \bar{n} . Sålunda: $F(\bar{u}) = \bar{u}_{\parallel} = \bar{u} - \bar{u}_{\perp} = \bar{u} - \bar{u}_{\parallel} \bar{n} = \bar{u} - \frac{\bar{u} \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}$. Alltså, $F(\bar{e}_i) = \bar{e}_i - \frac{\bar{e}_i \cdot \bar{n}}{\bar{n} \cdot \bar{n}} \bar{n}, i = 1, 2, 3$. Vi räknar ut dessa tre vektorer och skriver som kolumner i avbildningsmatrisen A , vilken då blir $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En vektor med egenvärde noll blir en vektor som avbildas på nollvektorn, vilket gäller för multiplar av normalvektorn \bar{n} . Ett exempel är alltså just \bar{n} .
- Uppgiften kan lösas med basbytesresonemag, men vi kan också sammanfatta informationen som $A \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Här finns också ett par varianter, tex att beräkna A^{-1} och multiplicera från vänster. Vi kan också transponera och betrakta $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} A^t = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -4 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. Genom att sätta upp och lösa $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & -4 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & -3 & 6 & 3 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & -5 \end{array} \right)$ kan vi avläsa A^t . Det innebär att $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & -2 \\ 12 & 10 & -5 \end{pmatrix}$.