Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2017-08-18, kl 8 - 13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet ($\mathbf{R}^2$) eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet ($\mathbf{R}^3$).

1. Vilken av punkterna $P = (1, 2, 3)$ och $Q = (2, 3, -1)$ ligger närmast planet $x - 2y - 3z = 1$?

2. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Beräkna (om det går) A^{-1} och A^{-2}. (Här är $A^{-2} = (A^{-1})^2$).

3. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + 2z = a \end{cases} .$$

   Ange för vilka a systemet är lösbart, och ange lösningen i dessa fall.

4. Bestäm a så att $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ blir en egenvektor till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a & 1 \end{pmatrix}$. Bestäm sedan (för detta a) en bas av egenvektorer till A.

5. Låt F vara den linjära avbildningen som beskriver projektionen på den linje genom origo som går genom punkten $P = (2, 1, -1)$. Bestäm F:s avbildningsmatris A. Ange en egenvektor med egenvärde 0.

6. Låt $\overline{v}$ vara en given vektor i rummet som inte är nollvektorn.

   (a) Sök alla vektorer $\overline{u}$ som löser ekvationen $\overline{v} \times \overline{u} = \overline{u} \times \overline{v}$

   (b) Sök alla vektorer $\overline{u}$ som löser ekvationen $\overline{v} \cdot \overline{u} = -\overline{u} \cdot \overline{v}$

   (c) Sök alla vektorer $\overline{u}$ som löser ekvationssystemet $\begin{cases} \overline{v} \times \overline{u} = \overline{u} \times \overline{v} \\ \overline{v} \cdot \overline{u} = -\overline{u} \cdot \overline{v} \end{cases}$.

7. Låt $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}$ och $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Lös matrisekvationen

$$AX - B = BC$$

   för de a där detta är möjligt.