Lösningsskiss för TAIU05, 2017-03-16

1. Om vi sätter $\overline{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ så blir $\overline{v}$ en riktningsvektor för linjen och $\overline{n}$ en normalvektor för planet. Eftersom $\overline{v} \cdot \overline{n} = 0$ så är $\overline{v}$ och $\overline{n}$ ortogonala, så att linjen L antingen ligger helt i planet P eller också är parallell med planet utan att skära det. Eftersom punkten $(2, 0, -2)$ inte ligger i planet har vi det senare fallet. Avståndet mellan planet och linjen är därför samma som avståndet mellan planet och vilken punkt som helst på linjen, tex just $P = (2, 0, -2)$. Låt nu Q vara en godtycklig punkt i planet, exempelvis $Q = (1, 1, 0)$. Vi bildar $\overline{u} = \overline{QP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Avståndet blir nu längden av $\overline{u}$:s projektion på $\overline{n}$ vilken är $\overline{u}_{\|\overline{n}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n} = \frac{9}{30}\overline{n}$. Längden och därmed det sökta avståndet blir sålunda $\frac{9\sqrt{30}}{30} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$.

2. Här kan man göra på flera sätt. Till exempel kan vi bilda en matris A med vektorernas koordinater som kolonner: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}$. Vi vet då att $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ linjärt beroende $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0$. Eftersom $\det(A) = 7a - 5$ blir alltså vektorerna linjärt beroende om $a = \frac{5}{7}$. (Då är $\overline{w} = \frac{5}{7}\overline{u} + \frac{4}{7}\overline{v}$.)

3. Andra ekvationen säger direkt att $x_1 = 3$, men då ger ekvation 1 att $x_2 = -2$ medan ekvation 3 kräver att $x_2 = 4$ vilket är motstridigt. Med $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ blir $A^t A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$, och normalekvationerna $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ ger sedan minsta kvadrat-lösningen $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ 4/7 \end{pmatrix}$.

4. Systemet kan skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Egenvärdena är lösningarna till karaktäristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$. Egenvärdena/rötterna är alltså $\lambda = -1$ och $\lambda = 4$, och en räkning visar att vi som tillhörande egenvektorer kan vi ta $\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (egenvärde -1) och $\overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, (egenvärde 4). $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ är linjärt oberoende och därmed vet vi att allmänna lösningen ges av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^{4t},\ C_1,\ C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

$Y(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ ger $C_1 = 2, C_2 = 1$, så att $y_1(1)$ i så fall är $-2e^{-1} + 2e^4$.

5. Avbildningsmatrisen har $F(\overline{e}_1), F(\overline{e}_2), F(\overline{e}_3)$ som kolumner, och $F(\overline{e}_1) = \overline{e}_1 \times \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_2) = \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$, så att F:s avbildningsmatris A blir $A = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$.

   $F(\overline{v}) = \overline{v} \times \overline{v} = \overline{0}$, vilket också kan ses ur $A\overline{v} = \begin{pmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta visar också att F inte är inverterbar, vilket alternativt kan ses ur $\det(A) = 0$.

6. Vi har att $\underline{f} = \underline{e}T$, där transformationsmatrisen $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Vi vet att $A_{\underline{f}} = T^{-1}A_{\underline{e}}T$, och vi finner att $T^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. En kalkyl ger sedan att $A_{\underline{f}} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -9 & 20 \end{pmatrix}$. $\underline{f}$ är en bas eftersom $\overline{f}_1, \overline{f}_2$ inte är parallella (eller via $\det T \neq 0$).

7. Vi har att $F(\overline{u}) = 1\overline{u}, F(\overline{v}) = 2\overline{v}, F(\overline{w}) = 3\overline{w}$, vilket i koordinatform innebär att $A\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Vi transponerar denna ekvation och får $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 8 \\ 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Vi tittar alltså på systemet $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 0 & 3 & 6 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right)$. Till höger står nu A^t, så att $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.