Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2017-06-05, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Vad är avståndet mellan linjen $L: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$ och planet $x + 2y - 5z = 3$?

2. Låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. Bestäm om möjligt a så att $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ blir linjärt beroende.

3. Betrakta ekvationssystemet
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 &= 2 \\ x_1 &= 3 \\ -x_1 + x_2 &= 1. \end{cases}$$
Visa att systemet saknar lösning. Bestäm systemets minsta kvadrat-lösning.

4. Bestäm den allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:
$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) + 2y_2(t) \\ y_2'(t) = 3y_1(t) + 2y_2(t). \end{cases}$$
Låt $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$. Om $Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, vad är då $y_1(1)$?

5. Låt F vara den linjära avbildning som ges av $F(\overline{u}) = \overline{u} \times \overline{v}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ för några reella tal a, b, c. Ange F:s avbildningsmatris. Vad blir $F(\overline{v})$? Är F inverterbar?

6. Antag att F har avbildningsmatrisen $A = A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ i standardbasen $\underline{e} = (\overline{e}_1, \overline{e}_2)$. Inför en nu bas $\underline{f} = (\overline{f}_1, \overline{f}_2,)$, där $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vad blir F:s avbildningsmatris $A_{\underline{f}}$ i basen $\underline{f}$? Hur vet man förresten att $\underline{f}$ är en bas för planet?

7. Låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Man vet att dessa är egenvektorer till den linjära avbildningen F med egenvärden $1, 2$ respektive 3. Vad är avbildningsmatrisen A?