Lösningsskiss för TAIU05, 2016-08-19

1. Planet har en normalvektor $\overline{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, och $\overline{u}_\perp$ blir ju då $\overline{u}_{\|\overline{n}} = \frac{\overline{u}\cdot\overline{n}}{\overline{n}\cdot\overline{n}}\overline{n} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$. Därefter finner vi att $\overline{u}_\| = \overline{u} - \overline{u}_\perp = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}$.

2. Linjen ges av $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix} + t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$, där $\overline{v} = \overline{AB} = \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$. Vi bildar $\overline{u} = \overline{AP} = \begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$. Om närmaste punkten är Q ges $\overline{AQ}$ av (se fig. 1.28 i läroboken) $\overline{AQ} = \overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}$. Nu ser vi att $Q = (1/2, 0, -1/2)$ och avståndet från P till linjen blir längden av $\overline{QP} = \overline{u} - \overline{u}_{\|\overline{v}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3\\4\\-1\end{pmatrix}$ dvs $\frac{1}{2}\sqrt{26}$.

3. Vi kan skriva ekvationssystemet som $\begin{array}{c}\left(\begin{array}{cc|c}3 & a & b\\4 & 2 & 1\end{array}\right)\\ \begin{array}{ccc}\text{x} & \text{y} & \end{array}\end{array}$ och med $A = \begin{pmatrix}3 & a\\4 & 2\end{pmatrix}$ vet vi att systemet har entydig lösning om $\det(A) = 6 - 4a \neq 0$. Systemet är alltså entydigt lösbart om $a \neq \frac{3}{2}$. Om $a = \frac{3}{2}$ får vi

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 3/2 & b\\4 & 2 & 1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}12 & 6 & 4b\\12 & 6 & 3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c}12 & 6 & 4b\\0 & 0 & 3-4b\end{array}\right)$$

Villkoret för lösbarhet blir därför att $b = \frac{3}{4}$ varvid ekvationssystemet lyder $12x + 6y = 3 \Leftrightarrow 4x + 2y = 1$ med lösningar $x = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}t,\ y = t,\ t \in \mathbf{R}$.

4. Eftersom en matrisprodukt AB är tillåten om antal kolumner i A är lika med antal rader i B ser vi att AB, BA^t, AC är tillåtna, övriga otillåtna. Uträkning ger sedan att

$$AB = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\0 & 1 & -4\end{pmatrix}, \quad BA^t = \begin{pmatrix}1 & 1\\3 & -4\\-2 & 3\end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}.$$

På sista frågan är svaret nej. Om till exempel $D = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ och $E = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}$ så blir $DE = \begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ men $ED = 2$.

5. Systemet kan skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där$Y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 2\end{pmatrix}$. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Egenvärdena är lösningarna till karaktäristiska ekvationen $0 = \begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\3 & 2-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda+1)(\lambda-4)$. Rötterna/egenvärdena är alltså $\lambda = -1$ och $\lambda = 4$. Som tillhörande egenvektorer kan vi ta $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, (egenvärde -1) och $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ (egenvärde 4). $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2\}$ bildar en bas för $\mathbf{R}^2$, och därmed vet vi att allmänna lösningen gas av

$$Y(t) = \begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}e^{4t},\ C_1 \text{ och } C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

Villkoret när $t = 0$ ger $\begin{pmatrix}5\\0\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow C_1 = 3, C_2 = 1$, det vill säga $y_1(t) = 3e^{-t} + 2e^{4t}, y_2(t) = -3e^{-t} + 3e^{4t}$.

6. Villkoret är att $3\overline{f}_1 - 2\overline{f}_2 + 2\overline{f}_3 = \overline{u}$ vilket direkt ger att $2\overline{f}_3 = \overline{u} - 3\overline{f}_1 + 2\overline{f}_2 = \begin{pmatrix}-2\\-8\\-6\end{pmatrix}$ så att $\overline{f}_3 = \begin{pmatrix}-1\\-4\\-3\end{pmatrix}$. Att $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ är linjärt oberoende följer tex av att $\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\2 & 0 & -4\\3 & 1 & -3\end{vmatrix} = 8 \neq 0$.

7. Om $F(\overline{v}) = \overline{0}$ så måste $\overline{u} \times \overline{v}$ vara parallell med $\overline{w}$ (med tanke på definitionen av kryssprodukt). Å andra sidan är $\overline{u} \times \overline{v}$ vinkelrät mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$, vilket innebär att både $\overline{u}$ och $\overline{v}$ måste vara vinkelräta mot $\overline{w}$. För $\overline{u}$ är villkoret redan uppfyllt, så kravet på $\overline{v}$ är alltså att $\overline{v}$ och $\overline{w}$ är ortogonala. Sålunda, $F(\overline{v}) = \overline{0}$ om $\overline{w} \cdot \overline{v} = 0$.