Lösningsskiss för TAIU05, 2016-06-07

1. Om vi tittar på linjen L_1 så är riktningsvektorn $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ parallell med planet Π. Eftersom planet inte skärs av L_2 så måste också dess riktningsvektor $\overline{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vara parallell med planet Π. Men det innebär att en normalvektor ges av $\overline{n} = \overline{u} \times \overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$. Men då ges planets ekvation av $-x + 5y + 7z = D$ för något D. Vi vet att punkten $(3, -1, -2)$ ligger i planet och genom att stoppa dessa värden i planets ekvation ser vi att $D = -22$. Planets ekvation är alltså $-x + 5y + 7z = -22$.

2. Om vi kallar koordinaterna för x_1, x_2, x_3, så söker vi alltså dessa så att $x_1\overline{f}_1 + x_2\overline{f}_2 + x_3\overline{f}_3 = \overline{u}$, det vill säga $x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$. Vi skall sålunda lösa ekvationen
$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -5 & -5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array},$$
och vi finner att $x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 1$.

3. Systemet saknar lösning eftersom till exempel ekvation ett och fyra kräver att $(x_1, x_2) = (4, 2)$, vilket inte löser ekvation två och tre. Om vi sätter $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ så söker vi minsta kvadrat-lösningen till ekvationen $A\overline{x} = \overline{b}$, det vill säga vi löser normalekvationerna $A^tA\overline{x} = A^t\overline{b}$, vilka blir
$$\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 21 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 36 \end{pmatrix}$$
varur vi finner att $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket alltså är minsta kvadrat-lösningen.

4. Vi räknar ut de tre determinanterna $\det(A) = 7$, $\det(B) = 0$, $\det(C) = -2$. Via räknelagen (för kvadratiska matriser) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ får vi omgående att $\det(AB) = \det(BA) = \det(CB) = \det(BC) = 0$ eftersom alla innehåller faktorn $\det(B)$ som ju är 0. Kvar har vi $\det(AC) = \det(CA) = 7 \cdot (-2) = -14$. Det innebär att AB, BA, BC, CB ej är inverterbara, men att AC och CA är det. På samma sätt finner vi $\det(BABCABBCBABCBABCCBABABBACACBABCCA) = \det(B)\det(A) \cdot \ldots \cdot \det(C)\det(A) = 0$, varför denna omfattande produkt inte heller är inverterbar.

5. Vi bildar karaktäristiska polynomet
$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^3 + \lambda^2 + 25\lambda - 25$$
Prövning ger att en rot är $\lambda = 1$ varefter polynomdivision och faktorisering ger att $p(\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$ så att egenvärdena är $1, 5, -5$. Vi bestämmer nu till varje egenvärde motsvarande egenvektorer genom att lösa ekvationssystemet $(A - \lambda I)\overline{x} = \overline{0}$.

Vi får

$$\lambda = 1: \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \text{x} & \text{y} & \text{z} \end{array} \end{array} \Rightarrow \overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, \text{ där } t \neq 0 \text{ krävs för egenvektor.}$$

$$\lambda = 5: \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -6 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, \text{ där } t \neq 0 \text{ krävs för egenvektor.}$$

$$\lambda = -5: \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -4 & -2 & 0 \\ -4 & 6 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}, \text{ där } t \neq 0 \text{ krävs för egenvektor.}$$

6. Från teorin vet vi att om vi har bassambandet $\mathbf{f} = \mathbf{e}T$, se ges avbildningsmatrisen för F i basen $\mathbf{f}$, $A_{\mathbf{f}}$, av

$$A_{\mathbf{f}} = T^{-1} A_{\mathbf{e}} T$$

där $A_{\mathbf{e}} = A$ enligt uppgiften. I vårt fall är transformationsmatrisen $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ med invers $T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Sålunda är

$$A_{\mathbf{f}} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Vi vet att en vridning i planet en vinkel θ (i positiv led) ges av matrisen $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. I tre dimensioner gäller för den första vridningen att den sker runt $\overline{e}_3$-axeln, det vill säga i xy-planet. Här blir alltså vridningsmatrisen $A_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ eftersom vridningsvinkeln är $60°$. Den andra vridningen sker i yz-planet, och där blir vridningsmatrisen $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ eftersom vridningsvinkeln nu är $30°$. Sammantagen blir avbildningsmatrisen (obs ordningen)

$$A = A_2 A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$