Lösningsskiss för TAIU05, 2016-03-16

1. Lättast är nog att först bilda linjen L som går genom P och har en normalvektor $\overline{n}$ till planet som riktningsvektor. Med $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ finner vi $L : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$. Genom att stoppa in koordinaterna for x, y, z i planets ekvation får vi villkoret $4+3t = 1$, det vill säga den punkt Q på linjen som också ligger i planet fås då $t = -1$. Genom att stoppa in $t = -1$ i linjens framställning får vi koordinaterna för Q, $Q = (4, 4, -1)$. Avståndet $||\overrightarrow{QP}|| = ||\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}|| = \sqrt{3}$. Av en händelse var alltså $\overrightarrow{QP} = \overline{n}$.

   Alternativ: välj en (godtycklig) punkt P_0 i planet, exempelvis $P_0 = (1, 0, 0)$, och bilda $\overline{u} = \overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$. Genom att dela upp $\overline{u} = \overline{u}_{\parallel} + \overline{u}_{\perp}$ där $\overline{u}_{\parallel}$ är parallell med planet och $\overline{u}_{\perp}$ är ortogonal mot planet blir $\overline{u}_{\parallel} = \overrightarrow{P_0Q}$, $\overline{u}_{\perp} = \overrightarrow{QP}$, där Q är den punkt i planet som är närmast P. Vidare blir avståndet från P till planet $||\overline{u}_{\perp}||$. Nu är $\overline{u}_{\perp} = u_{\parallel \overline{n}}$, det vill säga $\overline{u}$:s projektion på en normalvektor till planet. Som normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, och projektionsformeln ger då att $\overline{u}_{\parallel \overline{n}} = \frac{3}{3}\overline{n} = \overline{n}$. Det betyder att avståndet mellan P och planet är $||\overline{n}|| = \sqrt{3}$. Vidare är $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{QP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, så att $Q = (4, 4, -1)$.

2. Flera angreppssätt går bra. I princip skall vi lösa $\lambda_1\overline{u} + \lambda_2\overline{v} + \lambda_3\overline{w} = \overline{0}$ och se om vi finner icke-triviala lösningar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Vi tittar alltså på ekvationen

$$A\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ där } A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & a \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Ur $\det(A) = 3a - 6$ finner vi att vår ekvation har entydig lösning (vilken alltså blir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_2 = 0$) om $a \neq 2$. Om $a = 2$ blir $\det(A) = 0$, så att vi får parameterlösning och därmed linjärt beroende. Om $a = 2$ ser vi att till exempel $\overline{u} = -\overline{v} + 3\overline{w}$.

3. På matrisform skall vi lösa ekvationen

$$\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \end{pmatrix}$$

   Eftersom $|\begin{pmatrix} a-1 & 2 \\ 3 & a \end{pmatrix}| = a^2 - a - 6 = (a-3)(a+2)$ vet vi att systemet har entydig lösning om $a \neq 3, a \neq -2$. Om $a = 3$ får vi ekvationen $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ vilken saknar lösning (om $2x + 2y = 3$ kan inte $3x + 3y = 2$). Om $a = -2$ får vi ekvationen $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, med lösning $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.

4. Vi skriver ekvationen $BX + B^{-1}X = C \Leftrightarrow (B + B^{-1})X = C$. Ur $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ finner vi att $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ och därmed $B + B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Vår ekvation är nu

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

   Genom att vänstermultiplicera med $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ får vi $X = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

5. F:s avbildningsmatris A ges av $(F(\overline{e}_1)\, F(\overline{e}_2)\, F(\overline{e}_3))$, dvs A:s kolumner består av i tur och ordning $F(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Speglingen av en vektor $\overline{u}$ i planet får vi om vi från $\overline{u}$ subtraherar 2 gånger $\overline{u}$:s projektion på en normalvektor till planet. Som normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, och sålunda är

$$F(\overline{u}) = \overline{u} - 2\frac{\overline{u} \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}, \text{ dvs } F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - 2\frac{\overline{e}_i \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}, \quad i = 1, 2, 3.$$

   Ur detta finner man att $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. För att undersöka om $\overline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ är en egenvektor till F undersöker vi $A\overline{u} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overline{u}$. Alltså är $\overline{u}$ en egenvektor (med egenvärde 1).

6. Vi sätter $Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)}$ och kan då skriva systemet $Y'(t) = AY(t)$, där $A = \begin{pmatrix} 8 & -10 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}$. Vi söker en bas av egenvektorer till A. Egenvärdena är lösningarna till karaktäristiska ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -10 \\ 5 & -7-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2)$. Egenvärdena är alltså $\lambda = 3, \lambda = -2$. Ur detta får vi sedan egenvektorerna, där vi väljer till exempel $\overline{f}_1 = \binom{2}{1}$, (egenvärde 3) och $\overline{f}_2 = \binom{1}{1}$ (egenvärde -2). $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2\}$ bildar en bas för $\mathbf{R^2}$, och därmed vet vi att allmänna lösningen gas av

$$Y(t) = \binom{y_1(t)}{y_2(t)} = C_1\binom{2}{1}e^{3t} + C_2\binom{1}{1}e^{-2t}, \text{ där } C_1 \text{ och } C_2 \text{ är godtyckliga konstanter.}$$

$y_1(t) \to \overline{0}, t \to \infty$ ger $C_1 = 0$. $y_2(0) = 1$ ger då att $C_2 = 1$, dvs $Y(t) = \binom{1}{1}e^{-2t}$.

7. Genom att addera de två sambanden som är givna i uppgiften (samt utnyttja linjäritet) ser vi att $F(2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_3) = 4\overline{e}_1 + 4\overline{e}_3$. En subtraktion ger i stället $F(2\overline{e}_2) = 2\overline{e}_2$. Efter division med 2 ser vi att $\overline{e}_1 + \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor med egenvärde 2 och att $\overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ är en egenvektor med egenvärde 1. Eftersom F är symmetrisk måste egenvektorerna som hör till egenvärdet 0 vara ortogonala mot såväl $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ som $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Det betyder att exempelvis $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ är en egenvektor med egenvärde 0, det vill säga $F(\overline{e}_1 - \overline{e}_3) = \overline{0}$. Vi vet att $F(\overline{e}_2) = \overline{e}_2$, och ur $F(\overline{e}_1) + F(\overline{e}_3) = 2\overline{e}_1 + 2\overline{e}_3, F(\overline{e}_1) - F(\overline{e}_3) = \overline{0}$ får vi $F(\overline{e}_1) = F(\overline{e}_3) = \overline{e}_1 + \overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sålunda blir avbildningsmatrisen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.