Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2016-03-16, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2$ för planet eller $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Bestäm avståndet från punkten $P = (5, 3, -2)$ till planet $x - y - z = 1$. Vilken punkt i planet är närmast P?

2. Låt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\overline{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{w} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm (om möjligt) a så att $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ blir linjärt beroende.

3. Bestäm för varje a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y &= a \\ 3x + ay &= 2. \end{cases}$$

   Bestäm lösningarna för det/de a där systemet har oändligt många lösningar.

4. Bestäm den 2×2-matris X som löser matrisekvationen

$$BX - C = -B^{-1}X,$$

   där $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. F är den linjära avbilding $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ som beskriver spegling i planet $x + y - z = 0$. Ange F:s avbildningsmatris (i standardbasen). Är $\overline{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ en egenvektor till F?

6. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 8y_1(t) - 10y_2(t) \\ y_2'(t) &= 5y_1(t) - 7y_2(t). \end{cases}$$

   Ange de lösningar som (samtidigt) uppfyller $y_2(0) = 1$ samt $y_1(t) \to 0, t \to \infty$.

7. Man vet att den linjära avbildningen F är symmetrisk, har ett egenvärde 0, samt att

$$F(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3, \quad F(\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2 + 2\overline{e}_3.$$

   Bestäm F:s avbildningsmatris A.