Lösningsskiss för TAIU05, 2015-08-21

1. Kantvektorerna blir $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ samt $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, där man kan byta tecken om man vill. Motsvarande längder blir $\sqrt{14}, \sqrt{3}, \sqrt{17}$. Eftersom $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 0$ är vinkeln vid punkten P lika med $\frac{\pi}{2}$.

2. Vi skall undersöka om ekvationssystemet $\lambda_1 \overline{u} + \lambda_2 \overline{v} + \lambda_3 \overline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ har några icketriviala lösningar eller ej. Vanlig gausseliminering går bra, men vi kan också titta på matrisformuleringen
$$A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$
där $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Eftersom $\det(A) = -5 \neq 0$ finns bara triviala lösningen, och sålunda är $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ är linjärt oberoende.

3. Man finner att $\det(A) = -6$ vilket innebär att A är inverterbar. Eftersom $\det(B) = 2$ ger räknelagarna för determinater att $\det(A^{-1}B) = \det(A^{-1})\det(B) = \frac{1}{\det(A)}\det(B) = -2/6 = -1/3$.

4. Om vi antar att alla behövliga inverser finns (vilket sedan visar sig i räkningarna) får vi $A^{-1} = X^{-1}B - I \Leftrightarrow X(A^{-1} + I) = B \Leftrightarrow X = B(A^{-1} + I)^{-1}$. Ur $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ finner vi att $(A^{-1} + I)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ och sedan att $X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Avbildningsmatrisen, A säg, har som kolumner $F(\overline{e}_1), F(\overline{e}_2), F(\overline{e}_3)$. Sätt $\overline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Via projektionsformeln finner vi att $F(\overline{e}_1) = \frac{\overline{e}_1 \cdot \overline{v}}{\overline{v} \cdot \overline{v}}\overline{v} = \frac{1}{14}\overline{v}$ och att $F(\overline{e}_2) = \frac{2}{14}\overline{v}, F(\overline{e}_3) = \frac{3}{14}\overline{v}$. Det innebär att
$$A = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$
Med $\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ blir $F(\overline{u}) = A\overline{u} = \frac{5}{14}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

6. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Efter förenkling blir karaktäristiska polynomet till A lika med $-\lambda^3 + 12\lambda^2 - 36\lambda = -\lambda(\lambda - 6)^2$ så att egenvärdena är $0, 6, 6$. Lösningsmängderna till egenvärdena blir (tänk på att nollvektorn ingår i lösningsmängderna, men ej är en egenvektor) $\lambda = 0 : t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$ samt $\lambda = 6 : t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t, s \in \mathbf{R}$ Från teorin vet (se till exempel sats 8.20) vi att om $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ och om matrisen T har en bas av egenvektorer till A som kolumner så kommer $A = TDT^{-1}$. Ett möjligt val av T är alltså $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Om vi väljer en ON-bas av egenvektorer som kolunmer i T, till exempel $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ så kommer T dessutom att bli en ON-matris så att $T^t = T^{-1}$, vilket innebär att $A = TDT^t$.

7. En riktningsvektor för skärningslinjen mellan planen i fråga kan vi få genom att ta kryssprodukten mellan normalvektorer till dem. En riktningsvektor är alltså $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. Vi projicerar nu $\mathbf{u}$ på $\mathbf{w}$ och får $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_{\|\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Då blir $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ och vi ser att $\mathbf{u}_1$ och $\mathbf{u}_2$ är ortogonala som de ska. Nu kan vi normera samt kryssa och få $\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ vilket ger oss vår önskade ON-bas. Eftersom $\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}\mathbf{f}_1 + 2\sqrt{2}\mathbf{f}_2) = \sqrt{3}\mathbf{f}_1 + \sqrt{2}\mathbf{f}_2$ så måste koordinaterna för $\mathbf{v}$ i basen $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ vara $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Ett alternativ är att ur bassambandet $(\mathbf{f}_1\ \mathbf{f}_2\ \mathbf{f}_3) = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3)T$, där $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ använda koordinatsambandet $Y = T^{-1}X = T^tX = T^t\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, där alltså Y är koordinater i den nya basen, och där $T^{-1} = T^t$ eftersom $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ är ON.