

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2015-08-21, kl 8 - 13

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas \bar{e}_1, \bar{e}_2 för planet eller $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet.

1. En triangel i rummet har sina hörn i $P = (0, 0, 1)$, $Q = (-3, 2, 2)$ och $R = (1, 1, 2)$. Bestäm triangelns kantvektorer och sidlängder. Vad är vinkeln i hörnet P ?
2. Låt $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\bar{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Avgör om \bar{u} , \bar{v} , \bar{w} är linjärt oberoende eller ej.

3. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Visa att A är inverterbar och beräkna sedan $\det(A^{-1}B)$.

4. Bestäm den 2×2 -matris X som löser matrisekvationen

$$A^{-1} = X^{-1}B - I$$

då $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. F är den linjära avbildning $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ som beskriver projektion på linjen $t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$. Ange F 's avbildningsmatris (i standardbasen). Vad är $F(\bar{u})$ om $\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

6. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris T så att $A = TDT^{-1}$. Går det att hitta ett T så att $A = TDT^t$?

7. Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$. Skriv \mathbf{u} som en summa $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$ så att \mathbf{u}_1 och \mathbf{u}_2 är ortogonala och så att \mathbf{u}_1 är parallell med skärningslinjen mellan planen $x - 2y + z = 1$, $x + y - 2z = 3$. Bestäm en ON-bas $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ så att dels \mathbf{f}_1 och \mathbf{u}_1 blir parallella, och dels \mathbf{f}_2 och \mathbf{u}_2 blir parallella. Vad blir koordinaterna för vektorn $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_3$ i basen $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$?