Lösningsskiss för TAIU05, 2015-06-08

1. En vektor $\mathbf{w}$ som uppfyller villkoren måste till att börja med vara parallell med $\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$, det vill säga parallell med $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Eftersom denna senare vektor har längd $\sqrt{3}$, medan $\mathbf{w}$ skall ha längd 3, måste $\mathbf{w} = \pm\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Om linjen L är parallell med bägge planen, är den ortogonal mot bägge planens normalvektorer. Som normalvektorer till Π_1 och Π_2 kan vi ta $\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$. En riktningsvektor till L blir då $\mathbf{v} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Linjen L kan alltså skrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.
Anm. Man kan också få riktningsvektorn genom att bestämma skärningslinjen mellan planen.

3. Vi bildar de tre vektorerna $\overline{v}_1 = \overrightarrow{p_1p_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\overline{v}_2 = \overrightarrow{p_1p_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-3 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{v}_3 = \overrightarrow{p_1p_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ a-2 \end{pmatrix}$. Om vi ser $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$ och $\overline{v}_3$ som kantvektorer (utgående från samma hörn) för en parallellepiped, så ligger de fyra punkterna i ett och samma plan precis då de tre vektorerna gör det. Men då är också volymen av parallellepipeden 0, det vill säga (beloppet av) $\det(A) = 0$, där $A = (\overline{v}_1\, \overline{v}_2\, \overline{v}_3)$. Villkoret blir alltså
$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & a-3 & -1 \\ -2 & 1 & a-2 \end{vmatrix} = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2,$$
det vill säga att $a = 1$.
Anm. man kan ju också bestämma ekvationen för planet som innehåller p_1, p_2, p_3; det blir $(2a-5)x - 3y + (a-4)z = 6a - 27$. Genom att kräva att p_4 ligger planet får man återigen villkoret $a^2 - 2a + 1 = 0$.

4. Vi skriver ekvationssystemet som
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a-2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \end{pmatrix}.$$
Med $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a-2 & 3 \end{pmatrix}$ vet vi att systemet är entydigt lösbart om $\det(A) \neq 0$, det vill säga $3 + 2a - a^2 = (3-a)(1+a) \neq 0$. Systemet har alltså en lösning om $a \neq 3, a \neq -1$. $a = -1$ ger systemet
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{array}\right)$$
vilket saknar lösningar. $a = 3$ ger systemet
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{array}\right)$$
med lösningar $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}$.

5. Insättning ger $F(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{v})) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ samt $F(\mathbf{w})) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Alltså är $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$ egenvektorer med egenvärden 2 respektive -1. Eftersom avbildningen F är symmetrisk finns en ON-bas av egenvektorer, och även om vi struntar i normeringen måste vi få en bas om vi kompletterar med en vektor som är ortogonal mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{w}$, till exempel $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Som man kan konstatera är det en egenvektor med egenvärde 3.

6. Sätt $\overline{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Om $\overline{v}$ är parallell med $\overline{u}$ gäller att $F(\overline{v}) = \overline{v}$, medan om $\overline{v}$ är ortogonal mot $\overline{u}$ gäller att $F(\overline{v}) = -\overline{v}$. Avbildningsmatrisen A har som kolumner $F(\overline{e}_1)$, $F(\overline{e}_2)$, $F(\overline{e}_3)$, så vi delar upp $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ i komponenter ortogonala och parallella med $\overline{u}$ och använder ovanstående. Projektionsformeln ger att $\overline{e}_{1\|\overline{u}} = \frac{2}{5}\overline{u}$, $\overline{e}_{2\|\overline{u}} = \frac{1}{5}\overline{u}$, $\overline{e}_{3\|\overline{u}} = \overline{0}$, varur $\overline{e}_{1\perp\overline{u}} = \overline{e}_1 - \overline{e}_{1\|\overline{u}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och på samma sätt $\overline{e}_{2\perp\overline{u}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{e}_{3\perp\overline{u}} = \overline{e}_3$. Alltså blir $F(\overline{e}_1) = F(\overline{e}_{1\|\overline{u}} + \overline{e}_{1\perp\overline{u}}) = F(\overline{e}_{1\|\overline{u}}) + F(\overline{e}_{1\perp\overline{u}}) = \overline{e}_{1\|\overline{u}} - \overline{e}_{1\perp\overline{u}} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, och p.s.s. $F(\overline{e}_2) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $F(\overline{e}_3) = -\overline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Svaret blir alltså att $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

7. Med $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ kan systemet skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $A = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A. Karaktäristiska ekvationen $0 = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -1 \\ 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 8)^2$ har som enda rot $\lambda = 8$, och egenvektorerna till A finnes vara nollskilda multiplar av $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alltså finns ingen bas av egenvektorer, men om vi sätter $\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kan vi sätta $T = \begin{pmatrix} \overline{f}_1 & \overline{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, dvs $\underline{f} = \underline{e}T$. T är inverterbar. Vi inför nu nya funktioner $Z(t) = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ så att $\underline{f}Z(t) = \underline{e}Y(t)$ och sålunda $Z = T^{-1}Y(t)$. Vi finner att $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$, vilket innebär att ekvationssystemet (efter multiplikation med T^{-1}) kan skrivas $Z'(t) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}Z(t)$. Andra raden, $z_2'(t) = 8z_2(t)$ ger att $z_2(t) = Ce^{8t}$. Insatt i första raden får vi då ekvationen $z_1'(t) = 8z_1(t) + Ce^{8t} \Leftrightarrow (z_1(t)e^{-8t})' = C$, så att $z_1(t) = (Ct + D)e^{8t}$. Koordinatsambandet $Y(t) = TZ(t)$ ger till slut att

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C + D + Ct \\ D + Ct \end{pmatrix} e^{8t}.$$

C och D är här godtyckliga konstanter.