Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Magnus Herberthson

Kurskod: TAIU05
Provkod: TEN1

Tentamen i Linjär algebra, 6hp, 2015-06-08, kl 14 - 19

Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd 3 poäng. För betyg 3 räcker 8 poäng, för betyg 4 räcker 12 poäng, och för betyg 5 räcker 15 poäng.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ för planet eller $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ för rummet.

1. Låt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestäm alla vektorer som har längd 3 och som är ortogonala mot $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

2. Betrakta planen $\Pi_1 : x + y + z = 1$ och $\Pi_2 : x - 2y - z = 3$. Bestäm den linje som är parallell med både Π_1 och Π_2 och som går genom punkten $(1, -3, 4)$.

3. Bestäm det reella talet a så att punkterna $p_1 = (2, 3, 2)$, $p_2 = (3, 4, 0)$, $p_3 = (3, a, 3)$, $p_4 = (4, 2, a)$ ligger i samma plan.

4. Bestäm för varje a antalet lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ay &= 3 \\ (a-2)x + 3y &= a. \end{cases}$$

   Bestäm lösningarna för det/de a där systemet har oändligt många lösningar.

5. Låt F ha avbildningsmatris $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, och sätt $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Vilka av $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ är egenvektorer till F, och med vilka egenvärden? Ange en bas av egenvektorer till F.

6. Låt F vara den linjära avbildning som ger en vridning 180° runt linjen $t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbf{R}$.

   Bestäm F:s avbildningsmatris A (i standardbasen).

7. Bestäm allmänna lösningen till systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 9y_1(t) - y_2(t) \\ y_2'(t) &= y_1(t) + 7y_2(t). \end{cases}$$