Lösningsskiss för TAIU05, 2015-03-16

1. Linjen kan skrivas $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\overline{v}, t \in \mathbf{R}$, där $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\overline{v}$ är alltså parallell med planet vi söker. En annan vektor $\overline{u}$ parallell med planet är vektorn mellan punkterna (1,3,0) och (1,2,3), dvs $\overline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. $\overline{u}$ och $\overline{v}$ är inte parallella, så de spänner upp planet, och en normalvektor ges av $\overline{v} \times \overline{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. Även $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ är en normalvektor, så planets ekvation är $x + 3y + z + D = 0$ för något D. Genom att stoppa in punkten $(1, 3, 0)$ finner vi att $D = -10$. Avståndet kan vi få (projektion går också bra) genom att från origo titta när linjen med riktningsvektor $= \overline{n}$ skär planet. Linjen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\overline{n}, t \in \mathbf{R}$ skär planet när $t = \frac{10}{11}$, så att avståndet från origo till planet är $||\frac{10}{11}\overline{n}|| = \frac{10}{\sqrt{11}}$.

2. Eftersom $\overline{f}_2$ skall vara ortogonal mot $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{e}_1 + \overline{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, kommer $\overline{f}_2$ att vara parallell med $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vi normerar (och väljer ett tecken, + eller -) och sätter $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\overline{f}_3$ får vi sedan med ytterligare en kryssprodukt, $\overline{f}_3 = \overline{f}_1 \times \overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. (Rätt längd direkt.) $\overline{f}_2$ och $\overline{f}_3$ är bestämda så när som på tecken; med dessa val blir $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

3. Vi börjar att skriva om ekvationen till $AX - B^{-1}X = C \Leftrightarrow (A - B^{-1})X = C$ så att (om $A - B^{-1}$ är inverterbar) $X = (A - B^{-1})^{-1}C$. Vi finner i tur och ordning att $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A - B^{-1} = 3\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $(A - B^{-1})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ och att
$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. De två första ekvationerna ger att $x_1 = 3, x_2 = 0$, vilket dock inte uppfyller de två sista ekvationerna. Ekvationssystemet saknar alltså lösning. Systemet kan skrivas $A\overline{x} = \overline{b}$, där $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\overline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ och minsta kvadrat-lösningen är lösningen till normalekvationerna $A^tA\overline{x} = A^t\overline{b}$. Vi finner att $A^tA = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$, $A^t\overline{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix}$, och att $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ vilket alltså är den lösning vi söker.

5. F:s avbildningsmatris A ges av $(F(\overline{e}_1)\, F(\overline{e}_2)\, F(\overline{e}_3))$, dvs A:s kolumner består av i tur och ordning $F(\overline{e}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Den ortogonala projektionen av en vektor $\overline{u}$ på planet får vi om vi från $\overline{u}$ subtraherar $\overline{u}$:s projektion på en normalvektor till planet. Som normalvektor kan vi ta $\overline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, och sålunda är
$$F(\overline{u}) = \overline{u} - \frac{\overline{u} \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}, \text{ dvs } F(\overline{e}_i) = \overline{e}_i - \frac{\overline{e}_i \cdot \overline{n}}{\overline{n} \cdot \overline{n}}\overline{n}, \quad i = 1, 2, 3.$$
Ur detta finner man att $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Projektionen av $\overline{v}$ kan man få direkt ur formeln ovan, eller via multiplikation $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

6. Med $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ kan systemet skrivas $Y'(t) = AY(t)$, där $A = \left(\begin{smallmatrix} 7 & -18 \\ 3 & -8 \end{smallmatrix}\right)$. Vi söker egenvärden och egenvektorer till A (och hoppas hitta en bas av egenvektorer till A). Egenvärdena är lösningarna till karaktäristiska ekvationen $0 = \left|\begin{smallmatrix} 7-\lambda & -18 \\ 7 & -8-\lambda \end{smallmatrix}\right| = \lambda^2+\lambda-2$, som har rötterna $\lambda = 1$, $\lambda = -2$, vilket alltså är våra egenvärden. Ur detta får vi sedan egenvektorerna, där vi väljer till exempel $\overline{f}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, (egenvärde 1) och $\overline{f}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ (egenvärde -2). $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2\}$ bildar en bas för $\mathbf{R^2}$, och därmed vet vi att allmänna lösningen gas av

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = C_1\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)e^t + C_2\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)e^{-2t}, \ C_1 \text{ och } C_2 \text{ godtyckliga konstanter.}$$

$Y(t) \to \overline{0}, t \to \infty$ ger $C_1 = 0$, varefter $y_1(0) = 1$ ger att $C_2 = \frac{1}{2}$, dvs $Y(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^{-2t}$.

7. Sätt $A = \left(\begin{smallmatrix} -6 & 14 \\ -7 & 15 \end{smallmatrix}\right)$. Vi diagonaliserar A. Karaktäristiska ekvationen $0 = \left|\begin{smallmatrix} -6-\lambda & 14 \\ -7 & 15-\lambda \end{smallmatrix}\right| = \lambda^2 - 9\lambda + 8 = (\lambda-1)(\lambda-8)$ ger egenvärdena 1,8. $\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ är en egenvektor med egenvärde 1, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ är en egenvektor med egenvärde 8, så med $T = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gäller att $A = TDT^{-1}$ där $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Men $D = S^3$ om $S = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, dvs $A = TDT^{-1} = TS^3T^{-1} = TST^{-1}TST^{-1}TST^{-1}$. Om vi därför sätter $X = TST^{-1}$ blir $X^3 = A$ vilket vi önskade. Vi finner att $T^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, och sedan att

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$