Lösningsförslag, TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 2014-08-22

**1.** **(a)** Då $\overline{f_1}$ och $\overline{f_2}$ är ortogonala enhetsvektorer bildar de en ON-bas tillsammans med $\overline{f_3} = \overline{f_1} \times \overline{f_2} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - \overline{e_3})$.
*Alternativt* kan man välja $\overline{f_3} = -\overline{f_1} \times \overline{f_2}$.

**(b)** Med valet $\overline{f_3} = \overline{f_1} \times \overline{f_2}$ har man

$$\begin{aligned}\overline{f_1} - \overline{f_3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}) - \frac{1}{\sqrt{6}}(-\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - \overline{e_3}) \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\overline{e_1} + \frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{6}}\overline{e_2} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{6}}\overline{e_3},\end{aligned}$$

så koordinatmatrisen är

$$(\overline{f_1} - \overline{f_3})_e = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2}+1 \end{pmatrix}.$$

**(c)** Eftersom $\overline{e_1} - \overline{e_3} = \sqrt{2}\,\overline{f_2}$, är koordinatmatrisen

$$(\overline{e_1} - \overline{e_3})_f = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**2.** Beteckna de givna punkterna $P$, $Q$, $R$ och $S$ i den givna ordningen. Då fås $\overline{PQ} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2}$, $\overline{PR} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} - \overline{e_3}$ och $\overline{PS} = -2\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}$. Punkterna ligger i ett plan om och endast om $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ och $\overline{PS}$ är linjärt beroende, vilket de är eftersom $\overline{PR} = \overline{PQ} - \overline{PS}$. Alltså ligger de fyra punkterna i ett plan.

*Alternativt* kan man ta fram ekvationen för det plan som innehåller $P$, $Q$ och $R$ och notera att även $S$ uppfyller ekvationen.

*Alternativt* kan man konstruera en matris som har koordinatmatriserna för $\overline{PQ}$, $\overline{PR}$ respektive $\overline{PS}$ som kolonner (eller rader) och konstatera att determinanten är noll.

**3.** Om $\overline{v}$ betecknar en riktningsvektor till $\ell$ sådan att $|\overline{v}| = 9$, ges de sökta punkternas ortsvektorer av $\overline{OP} \pm \overline{v}$. Eftersom $\overline{PQ}$ är en riktningsvektor till $\ell$ och $|\overline{PQ}| = 3$, kan vi ta $\overline{v} = 3\overline{PQ} = 6\overline{e_1} - 6\overline{e_2} + 3\overline{e_3}$. De sökta punkterna är alltså $(1+6, 0-6, 1+3) = (7, -6, 4)$ respektive $(1-6, 0+6, 1-3) = (-5, 6, -2)$.

**4.** En normalvektor till planet ges av $\overline{n} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + 2\overline{e_3}$. Bilden av en vektor $\overline{v}$ ges av $F(\overline{v}) = \overline{v} - 2\overline{v}_{\|\overline{n}}$, där $\overline{v}_{\|\overline{n}}$ betecknar $\overline{v}$:s ortogonala projektion på $\overline{n}$. Med projektionsformeln beräknas basvektorernas bilder:

$$
\begin{aligned}
F(\overline{e_1}) &= \frac{1}{3}(2\overline{e_1} - \overline{e_2} - 2\overline{e_3}), \\
F(\overline{e_2}) &= \frac{1}{3}(-\overline{e_1} + 2\overline{e_2} - 2\overline{e_3}), \\
F(\overline{e_3}) &= \frac{1}{3}(-2\overline{e_1} - 2\overline{e_2} - \overline{e_3}).
\end{aligned}
$$

Avbildningsmatrisen $A$ har koordinatmatriserna för dessa bilder som kolonner, så

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**5.** Egenvärden och egenvektorer till $A$ söks. Sekularekvationen blir, efter förenkling, $\lambda^2(3-\lambda) = 0$ med lösningarna $\lambda = 3$ och $\lambda = 0$ (dubbelrot).

De tillhörande egenvektorerna visar sig vara

$$\overline{v}_3 = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s \neq 0)$$

respektive

$$\overline{v}_0 = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad ((t,u) \neq (0,0)).$$

Därför kan vi välja

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**6.** Om den andra ekvationen multipliceras med $A$ från höger och subtraheras från den första, fås $Y(B-A) = I - 2A$. Eftersom $B - A$ är inverterbar, erhålls därför

$$
\begin{aligned}
Y &= (I-2A)(B-A)^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Ur den andra ekvationen fås nu

$$X = 2I - Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

**7.** Systemet kan skrivas på matrisformen $AX = B$ där $X$ är en kolonnmatris med systemets variabler som element. Minstakvadratlösningarna är lösningarna till normalekvationen $A^T AX = A^T B$. Om $\det(A^T A) \neq 0$ finns det en unik sådan. Om istället $\det(A^T A) = 0$ finns det oändligt många (eftersom normalekvationen aldrig kan sakna lösning).

Antalet variabler är lika med antalet ekvationer, så $A$ är kvadratisk och determinanten $\det A$ därmed definierad. Systemet är olösligt, så $\det A = 0$. Enligt räknereglerna för determinanter gäller då $\det(A^T A) = \det(A^T)\det A = (\det A)^2 = 0$, så normalekvationen har oändligt många lösningar. $\square$