

Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Axel Hultman

Tentamen TAIU05/TEN1 Linjär algebra, 6hp, 2014-08-22

Skrivtid 8–13. Inga hjälpmedel är tillåtna. Varje uppgift är värd tre poäng. Betygsgränser: 8 poäng ger betyg 3, 12 poäng ger betyg 4 och 15 poäng ger betyg 5. Tid för tentamensvisning meddelas via kurshemsidan.

Alla koordinater är givna i en positivt orienterad ON-bas $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ för rummet.

1. Låt $\overline{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)$ och $\overline{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{e}_1 - \overline{e}_3)$.
 - (a) Finn en vektor \overline{f}_3 så att $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$ bildar en ON-bas för rummet.
 - (b) Vilka koordinater har vektorn $\overline{f}_1 - \overline{f}_3$ i basen $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$?
 - (c) Vilka koordinater har vektorn $\overline{e}_1 - \overline{e}_3$ i basen $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3$?

2. Avgör om det finns något plan som innehåller alla de fyra punkterna $(0, 1, -1)$, $(1, 3, -1)$, $(3, 2, -2)$ och $(-2, 2, 0)$.

3. Linjen ℓ innehåller punkterna $P = (1, 0, 1)$ och $Q = (3, -2, 2)$. Vilka punkter på ℓ ligger 9 längdenheter från P ?

4. Den linjära avbildningen F på rummet ges av spegling i planet som har ekvationen $x + y + 2z = 0$. Bestäm F 's avbildningsmatris.

Var god vänd!

5. Betrakta matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestäm en diagonalmatris D och en inverterbar matris T sådana att $A = TDT^{-1}$.

6. Finn de matriser X och Y som uppfyller systemet av matrisekvationer

$$\begin{cases} XA + YB = I, \\ X + Y = 2I, \end{cases}$$

där I betecknar identitetsmatrisen och

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Antag att vi har ett olösligt linjärt ekvationssystem där antalet ekvationer är lika med antalet variabler. Visa att systemet har oändligt många minstakvadratlösningar.